

Math. P.⁴⁰
103^{nc}

Math. P.

103^{nc}

Eisenstein, g.

Tabelle

Verfahren zur Bestimmung der

Verhältnisse der

Verhältnisse der

Verhältnisse der

Verhältnisse der

1881

(Verhältnisse der)

Verhältnisse der

Tabelle
der
reducirten positiven ternären quadratischen Formen
nebst den

Resultaten neuer Forschungen über diese Formen

in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Berechnung

von

Dr. G. Eisenstein,
Docenten an der Universität zu Berlin.

Berlin, 1851.

Druck und Verlag von G. Reimer.

326.B.

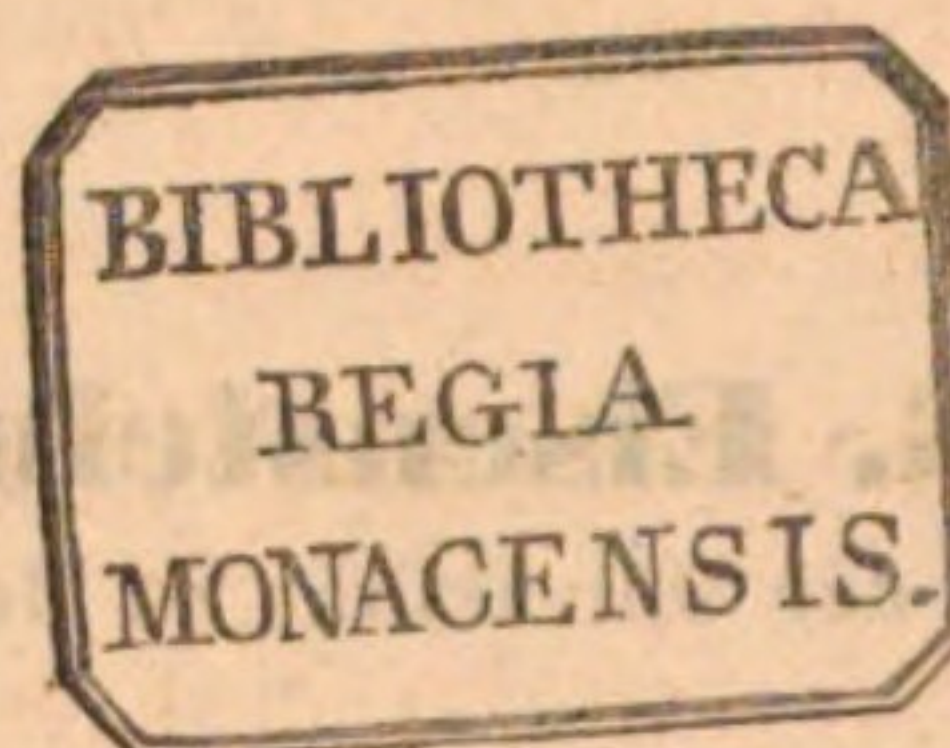
Tabell

reduzieren positiven ternären quadratischen Formen

von

Resultate neuer Forschungen über diese Formen

in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Darstellung



Berlin, 1851.

Druck und Verlag von G. Reimer.

V o r r e d e.

Die positiven ternären quadratischen Formen bilden sowohl in rein mathematischer Beziehung wegen ihrer schönen und eleganten Eigenschaften, als auch in Hinsicht auf die Crystallographie wegen ihrer Anwendung auf die Erklärung der Crystallgestalten einer jeden festen Substanz *) einen Gegenstand von hohem wissenschaftlichem Interesse. Es schien daher aus mathematischem wie aus physicalischem Gesichtspuncte wünschenswerth, eine gröfsere Tabelle dieser Formen anzufertigen und der Öffentlichkeit zu übergeben, ein Unternehmen, welches bereits durch die höchst dankbar anzuerkennende Theilnahme der hiesigen Academie der Wissenschaften ein günstiges Urtheil erfahren hat. Der Verfasser, welcher mit besonderer Vorliebe die Theorie der ternären quadratischen Formen weiter fortzubilden bemüht gewesen ist, hat sich seit zwei Jahren mit der Construction einer solchen Tabelle beschäftigt und erlaubt sich jetzt, die Ergebnisse seiner Arbeit in diesem Werkchen dem wissenschaftlichen Publicum vorzulegen.

*) *Seeber*, Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen. *Gilberts Annalen der Physik*, Band 76. *Crelle's Journal für die Mathematik*, Band 10.

Was die Anordnung des Stoffes betrifft, so ist die eigentliche Tabelle der Formen in der zweiten Abtheilung von Seite 29 an enthalten und sind derselben die zu Grunde gelegten Methoden der Berechnung und Controlirung vorangeschickt und in der ersten Abtheilung zusammengestellt worden. Die Tabelle selbst hat durch Einführung eines ganz neuen den ternären Formen eigenthümlichen Begriffs einen wesentlichen Zuwachs erhalten. Da nämlich die verschiedenen Classen, in welche man die ternären Formen zu vertheilen pflegt, nicht immer eine gleiche Anzahl von Formen umfassen, so gehört zur vollständigen Erkenntniß der Natur einer solchen Classe von äquivalenten Formen — neben der von den bisherigen Bearbeitern geforderten Aufstellung einer die Classe repräsentirenden reducirten Form — noch die Bestimmung dessen, was man das Gewicht, die Dichtigkeit, das Maafs, den Inhalt oder die Formenmenge der Classe nennen kann. Dem letzteren Bedürfnisse wird durch die unter den reducirten Formen befindlichen kleinen mit δ bezeichneten Zahlen entsprochen, welche im umgekehrten Verhältnisse dieser Dichtigkeiten stehen. Bei der Abfassung der ersten halb theoretischen Abtheilung konnte es nicht vermieden werden, auch einige tiefer in die Theorie der ternären Formen eindringende bisher ungelöste Fragen zu berühren, namentlich diejenigen über die Anzahl der zu einer Determinante gehörigen Classen, über die eben erwähnte Dichtigkeit der Classen, welche wieder mit dem Problem der Transformation zusammenhängt u. s. w. Jedoch ist dies nur so weit geschehen, als es zu der nach dem Plane dieser Arbeit stets in den Vordergrund gestellten Ausbildung des technischen auf die wirkliche numerische Berechnung bezüglichen Theils erforderlich gewesen ist, während die Begründung und fernere Entwicklung der ohne Beweis mitgetheilten meist ganz neuen Sätze in eine spätere Schrift verwiesen werden mußten. Derselbe Grundsatz der auf die Leichtigkeit der numerischen Ausführung berechneten Behandlung ist in dem

auf die zweite Abtheilung folgenden Anhang beobachtet worden, welcher hauptsächlich die weitere Durchführung des in §. 6 angeregten Problems der Transformation enthält. Noch ist während des Druckes ein Versuch zu einer kleinen Tabelle der unbestimmten oder indifferenten Formen nebst einigen darauf bezüglichen Bemerkungen hinzugefügt worden, welcher vielleicht zur genaueren Erforschung dieser noch wenig untersuchten Gattung neue Anregung geben dürfte.

Der Verfasser hat keine Mühe gescheut, nicht allein durch die genaueste oft wiederholte Prüfung der gröfseren und kleineren Tafeln, so wie aller übrigen Resultate, sondern auch durch die sorgfältigste Correctur der Druckbogen dieses Buch möglichst vor Fehlern zu bewahren, und glaubt daher, so weit dies überhaupt in menschlichen Kräften steht, sich für die Richtigkeit des hier Gegebenen verbürgen zu können. Die wenigen noch unverbesserten Druckfehler sind auf der Rückseite dieses Blattes angezeigt.

Es liegt in der Natur des hier behandelten Gegenstandes, dafs dieses Werkchen zunächst nur auf ein kleines aber ausgewähltes Publicum Anspruch machen darf; möge es hiermit der Geneigtheit Derer empfohlen sein, welche an der Fortbildung der mathematischen Wissenschaften Antheil nehmen.

Schliesslich fühlt sich der Verfasser gedrungen, noch ausdrücklich gegen diejenigen verehrten Gönner und Freunde, welche ihn bei der Herausgabe seiner Arbeit auf so wohlwollende Weise unterstützt haben, den wärmsten Dank auszusprechen.

Berlin im März 1851.

Berichtigungen.

Seite 2 Zeile 9 v. o. lese man „oberen Coëfficienten“ statt „Coëfficienten“

— 22 — 7 v. u. lese man $b' + 2b''$ statt $2b' + b''$, und $2b + b'$ statt $2b + b''$

— 19 — 2 v. u. lese man „vortheilhafte“ statt „hohe“

Erste Abtheilung.

Resultate neuer Forschungen über die reducirten positiven ternären Formen, in besonderer Rücksicht auf die Berechnung und Controlirung der Tabelle dieser Formen.

§. 1.

Entstehung und Einrichtung der Tabelle.

Nachdem mir durch wiederholte Anstrengungen die Lösung zweier Haupt-Aufgaben über ternäre positive quadratische Formen gelungen war, und ich hierdurch eine doppelte Reihe von neuen Sätzen über diese Formen gewonnen hatte, erschien es mir wünschenswerth, sowohl zur numerischen Prüfung dieser Sätze, als auch zu Gunsten neuer Forschungen, eine Tabelle der reducirten ternären Formen von größerem Umfange und größerer Mannigfaltigkeit zu besitzen, als die, welche *Seeber* am Schlusse seines diesen Gegenstand betreffenden Werkes construirt hat; denn die letztere erstreckt sich, trotz ihres scheinbar bedeutenden Umfanges, wenn man sich der von *Gauß's* eingeführten Nomenclatur bedient, wie hier stets geschehen wird, und wenn man allein auf die hauptsächlich wichtigen *eigentlich primitiven* Formen Rücksicht nimmt, nur bis zur Determinante — 25. Dies genügte schon nicht für meinen nächsten Zweck, da die erwähnten Sätze eine sehr mannigfaltige Gestalt annehmen, je nachdem die Determinante durch eine oder mehrere Primzahlen theilbar ist, quadratische Theiler enthält oder nicht, ungerade oder gerade ist, und im letzteren Falle durch niedere oder hohe Potenzen von 2 aufgeht u. s. w. Der Erfüllung meines Wunsches stand indessen die große Länge und Complication der zu unternehmenden Rechnung entgegen, und ich hätte, hierdurch abgeschreckt und ohnedies mit andern rein theoretischen Forschungen beschäftigt, meine Absicht, die *Seeber'sche* Tabelle wenigstens bis zur Determinante — 100 fortzusetzen, aufgeben müssen, wäre es mir nicht durch die theilnehmende und

wohlwollende Unterstützung der Akademie der Wiss. zu Berlin möglich gemacht worden, mir die nöthigen Rechenkräfte zu verschaffen, mit deren Hülfe ich im Stande war, diese Arbeit, ohne gänzliche Vernachlässigung meiner übrigen mathematischen Untersuchungen, zu Ende zu führen.

Die in der zweiten Abtheilung folgende Tabelle, welche ich, zum Unterschiede einiger hier im Texte selbst vorkommenden Tafeln, die gröfsere Tabelle nennen will, enthält die von *Seeber* definirten reducirten Formen nach ihren Determinanten $-D$, von -1 bis -100 , und nach der Gröfse ihrer Coëfficienten geordnet; und zwar constituiren dieselben für jede Determinante, nach dem von *Seeber* aufgestellten Satze, dessen Beweis neuerdings von *Dirichlet* *) ungemein vereinfacht worden ist, ein vollständiges System nicht-äquivalenter, und die zur Determinante gehörenden Classen repräsentirender Formen. Die äufsere Einrichtung der Tabelle ist so einfach, dafs sie kaum einer besonderen Auseinandersetzung bedarf; in der ersten Vertical-Columnne befinden sich die Werthe von D , dahinter die Anzahl der zugehörigen Formen; sodann folgen die Formen selbst, und es bedeutet $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ jedesmal die Form $ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$. In die Tabelle sind nur die *primitiven* Formen aufgenommen, für welche a, a', a'', b, b', b'' keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, da die nicht primitiven, nach Wegnahme des grössten gemeinschaftlichen Theilers, sich schon bei früheren Determinanten vorfinden und unnöthiger Weise den Umfang der Tabelle vergröfsern würden, ohne wirklichen Nutzen zu gewähren. Ferner habe ich die Tabelle in zwei Theile getheilt; der erste enthält die *eigentlich primitiven* Formen, für welche auch $a, a', a'', 2b, 2b', 2b''$ keinen gemeinschaftlichen Theiler darbieten, der zweite die *uneigentlich primitiven*, für welche a, a', a'' alle drei *gerade* Zahlen sind. Unter jeder einzelnen Form befindet sich der Werth von δ , welcher die der Form zugehörige Transformations-Anzahl angiebt, von welcher bald die Rede sein wird.

Diese gröfsere Tabelle ist auf doppelte Weise, nach zwei ganz verschiedenen Methoden, theils unter meiner Leitung, theils von mir selbst berechnet und sodann einer dreifachen Controle unterworfen worden, so dafs ich glaube mich für ihre Richtigkeit verbürgen zu können. Übrigens wird man aus Nachstehendem ersehen, wie jeder etwa vorkommende Fehler aus dem blofsen

*) *Crelle's Journal* Band 40 Seite 209 ff.

Anblick der Formen beim Gebrauche sogleich erkannt werden kann. Die Methoden haben sich im Laufe der Rechnung selbst dergestalt vereinfacht, dafs ich glaube, es werde nicht meine Kräfte übersteigen, die Tabelle später in Mufsestunden mit einiger Unterstützung weiter fortzuführen.

§. 2.

Erste Methode der Berechnung.

Die erste Methode ist die sich zunächst darbietende, von *Seeber* vorgeschriebene, in vielen Stücken bedeutend vereinfacht, nach welcher für jede einzelne Determinante von -1 bis -100 diejenigen Formen ermittelt wurden, welche den charakteristischen Ungleichheitsbedingungen der reducirten Formen Genüge leisten. Es würde überflüssig sein, in näheres Detail einzugehen, zumal da diese Methode, als zu complicirt, sich für die tabellarische Fortführung unbrauchbar erweist und nur für die Untersuchung einzelner Determinanten Werth behalten wird. Ich hebe daher, mit Übergehung des schon von *Seeber* Bemerkten, nur einige wesentliche Verbesserungen hervor. Es ergab sich namentlich eine unerwartete Vereinfachung des Begriffs der reducirten Formen selbst, indem diejenigen Ungleichheitsbedingungen, welche bei *Seeber* auf den zweiten Grad steigen, auf lineare zurückgeführt werden können; man hat hierdurch den grossen Vortheil, der mühsamen Bildung der bei *Seeber* in vielen Fällen nothwendigen *zugeordneten* Formen überhoben zu sein, und kann aus dem blofsen Anblick der Coëfficienten einer Form unmittelbar beurtheilen, ob sie reducirt ist, oder nicht. Mit dieser Vereinfachung stellt sich die Definition der reducirten Formen in folgender Weise, wobei sich von selbst versteht, dafs a, a', a'' immer positive Werthe haben müssen:

Es giebt zwei Arten von reducirten Formen:

- I. Formen wie $\left(\begin{smallmatrix} a, & a', & a'' \\ +b, & +b', & +b'' \end{smallmatrix} \right)$, in denen b, b', b'' alle drei *positiv* sind.

Hauptbedingungen:

$$a \leq a' \leq a'';$$

$$2b \leq a', \quad 2b' \leq a, \quad 2b'' \leq a.$$

Nebenbedingungen:

Wenn $a = a'$, so mufs $b \leq b'$, wenn $a' = a''$, so mufs $b' \leq b''$ sein,
wenn $2b = a'$, so mufs $b'' \leq 2b'$ sein,
- $2b' = a$, - $b'' \leq 2b$ -
- $2b'' = a$, - $b' \leq 2b$ -

II. Formen wie $\left(\begin{smallmatrix} a, & a', & a'' \\ -b, & -b', & -b'' \end{smallmatrix}\right)$, in denen b, b', b'' Null oder positiv sind.

Hauptbedingungen:

$$a \leq a' \leq a''; \\ 2b \leq a', \quad 2b' \leq a, \quad 2b'' \leq a; \quad 2(b + b' + b'') \leq a + a'.$$

Nebenbedingungen:

Wenn $a = a'$, so mufs $b \leq b'$, wenn $a' = a''$, mufs $b' \leq b''$ sein;

wenn $2b = a'$, so mufs $b'' = 0$ sein, Typus $\left(\begin{smallmatrix} a, & a', & a'' \\ -\frac{1}{2}a', & -b', & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

- $2b' = a$, - $b'' = 0$ -, Typus $\left(\begin{smallmatrix} a, & a', & a'' \\ -b, & -\frac{1}{2}a, & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

- $2b'' = a$, - $b' = 0$ -, Typus $\left(\begin{smallmatrix} a, & a', & a'' \\ -b, & 0, & -\frac{1}{2}a \end{smallmatrix}\right)$;

wenn endlich $2(b + b' + b'') = a + a'$ ist, so mufs $a \leq 2b' + b''$, d. h. $b'' \geq (a - 2b')$ sein. Diese Bedingungen, deren Umfang mit dem der *Seeberschen*, wie streng nachgewiesen werden kann, vollkommen übereinstimmt *), sind offenbar von solcher Art, dafs die Frage nach ihrem Stattfinden bei jeder vorliegenden Form nach blofser aufmerksamer Ansicht derselben ohne weitere Rechnung unmittelbar mit Ja oder Nein beantwortet werden kann.

Eine fernere Vereinfachung besteht darin, dafs man für die kleinsten Werthe des ersten Coëfficienten a die sämtlichen zu einer gegebenen Determinante $-D$ gehörigen reducirten Formen mit einem solchen ersten Coëfficienten a *a priori* angeben kann. In der That sind alle reducirten Formen, für welche $a = 1$ ist, in dem Schema $\left(\begin{smallmatrix} 1, & \mathfrak{A}, & \mathfrak{C} \\ -\mathfrak{B}, & 0, & 0 \end{smallmatrix}\right)$ enthalten, wo für $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ nach und nach alle reducirten *binären* positiven Formen **) mit der Determinante $-D$ und nicht negativem mittleren Coëfficienten $\mathfrak{B}$ gesetzt werden müssen; z. B. für $D = 7$ sind diese Formen $(1, 0, 7)$ und $(2, 1, 4)$, aus denen sich die ternären Formen $\left(\begin{smallmatrix} 1, & 1, & 7 \\ 0, & 0, & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1, & 2, & 4 \\ -1, & 0, & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ableiten lassen. — Für $a = 2$ hat man die vier Arten von ternären Formen

$$\left(\begin{smallmatrix} 2, & \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+1), & \frac{1}{2}\mathfrak{C} \\ -\frac{1}{2}\mathfrak{B}, & 0, & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 2, & \frac{1}{2}\mathfrak{A}, & \frac{1}{2}(\mathfrak{C}+1) \\ -\frac{1}{2}\mathfrak{B}, & -1, & 0 \end{smallmatrix}\right), \\ \left(\begin{smallmatrix} 2, & \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+1), & \frac{1}{2}(\mathfrak{C}+1) \\ \frac{1}{2}(\mathfrak{B}+1), & 1, & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 2, & \frac{1}{2}\mathfrak{A}, & \frac{1}{2}\mathfrak{C} \\ -\frac{1}{2}\mathfrak{B}, & 0, & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

in welchen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ alle binären reducirten positiven Formen mit der Determinante $-2D$ bedeuten, deren erster Coëfficient $\mathfrak{A} > 2$ ist (so dafs $\mathfrak{A} = 1, 2$

*) so dafs die *Seeberschen* eine Folge der hier gegebenen sind; und umgekehrt.

**) d. h. diejenigen, in denen $2\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ positiv sind.

auszuschließen und erst mit $\mathfrak{A} = 3$ anzufangen ist), und deren mittlerer Coefficient $\mathfrak{B}$ nicht negativ ist; und zwar ist derjenige Typus ternärer Formen zu wählen, dessen Coefficienten ganze Werthe erhalten, indem jeder binären Form $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ eine ternäre entspricht, und diese ist die erste der vier obigen, wenn $\mathfrak{A}$ ungerade, $\mathfrak{B}$ gerade, $\mathfrak{C}$ gerade, die zweite, wenn $\mathfrak{A}$ gerade, $\mathfrak{B}$ gerade, $\mathfrak{C}$ ungerade, die dritte, wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ alle drei ungerade, die vierte, wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ alle drei gerade sind; im letzteren Falle, welcher nur Statt findet, wenn D gerade ist, stellt $(\frac{1}{2}\mathfrak{A}, \frac{1}{2}\mathfrak{B}, \frac{1}{2}\mathfrak{C})$ alle reducirten Formen mit der Determinante $-\frac{1}{2}D$ vor, und es muß in diesem Falle noch für $\mathfrak{A} = 4$ der Werth $\mathfrak{B} = 2$ ausgeschlossen und nur der Werth $\mathfrak{B} = 0$ beibehalten werden, denn die binäre Form $(4, 2, \mathfrak{C})$, in welcher $\mathfrak{C}$ gerade ist, würde die ternäre $(\frac{2}{-1}, \frac{2}{0}, \frac{1}{0}\mathfrak{C})$ ergeben, welche *nicht* reducirt ist, weil $a = a' = 2$, aber nicht $b \leq b'$; übrigens ist dies neben der Beschränkung $\mathfrak{A} > 2$ der einzige für $a = 2$ Statt findende Ausnahmefall. Um also alle ternären Formen mit $a = 2$ für die Determinante $-D$ zu erhalten, schreibe man in erster Zeile sämtliche reducirten binären Formen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ mit der Determinante $-2D$ und nicht negativem $\mathfrak{B}$; mit Übergehung derjenigen, in welchen $\mathfrak{A} = 1$, oder $\mathfrak{A} = 2$, und, wenn es Statt finden sollte, auch derjenigen, in welcher gleichzeitig $\mathfrak{A} = 4$, $\mathfrak{B} = 2$ und $\mathfrak{C}$ gerade ist, schreibe man unter die übrigen in zweiter Zeile neue binäre Formen (a', b, a'') , welche aus jenen hervorgehen, wenn man von jedem Coefficienten die Hälfte, oder, sollte er ungerade sein, die Hälfte der folgenden um 1 gröfseren Zahl nimmt; die noch fehlenden Coefficienten b' und b'' so wie das Vorzeichen von b werden aus dem Rest von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ (mod. 2) entsprechend den vier obigen Typen erkannt.

Beispiel $D = 42$:

Red. bin. F. det. -84 : $(1, 0, 84), (2, 0, 42), (3, 0, 28), (4, 0, 21), (4, 2, 22)$

$(a', b, a'') = : \quad * \quad * \quad (2, 0, 14), (2, 0, 11), \quad *$

$b', b'' = : \quad 0, -1 \quad -1, 0$

Red. bin. F. det. -84 : $(5, 1, 17), (6, 0, 14), (7, 0, 12), (8, 2, 11), (10, 4, 10)$

$(a', b, a'') = : (3, 1, 9), (3, 0, 7), (4, 0, 6), (4, -1, 6), (5, -2, 5)$

$b', b'' = : 1, 1 \quad 0, 0 \quad 0, -1 \quad -1, 0 \quad 0, 0$

Hieraus entspringen die folgenden ternären Formen determinantis -42 :

$(\frac{2}{0}, \frac{2}{0}, \frac{14}{-1}), (\frac{2}{0}, \frac{2}{-1}, \frac{11}{0}), (\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{9}{1}), (\frac{2}{0}, \frac{3}{0}, \frac{7}{0})$

$(\frac{2}{0}, \frac{4}{0}, \frac{6}{-1}), (\frac{2}{-1}, \frac{4}{-1}, \frac{6}{0}), (\frac{2}{-2}, \frac{5}{0}, \frac{5}{0}),$

und diese sind die einzigen, deren erster Coefficient $a = 2$ ist. — Für $a = 3$

sind die fünf folgenden Arten von Formen erschöpfend:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc} 3, & \frac{1}{3}(\mathfrak{A}+1), & \frac{1}{3}\mathfrak{C} \\ -\frac{1}{3}\mathfrak{B}, & 0, & -1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc} 3, & \frac{1}{3}\mathfrak{A}, & \frac{1}{3}(\mathfrak{C}+1) \\ -\frac{1}{3}\mathfrak{B}, & -1, & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc} 3, & \frac{1}{3}(\mathfrak{A}+1), & \frac{1}{3}(\mathfrak{C}+1) \\ \frac{1}{3}(\mathfrak{B}+1), & 1, & 1 \end{array} \right), \\ & \left(\begin{array}{ccc} 3, & \frac{1}{3}(\mathfrak{A}+1), & \frac{1}{3}(\mathfrak{C}+1) \\ -\frac{1}{3}(\mathfrak{B}-1), & -1, & -1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

und die nur für $D \equiv 0 \pmod{3}$ Statt findenden $\left(\begin{array}{ccc} 3, & \frac{1}{3}\mathfrak{A}, & \frac{1}{3}\mathfrak{C} \\ -\frac{1}{3}\mathfrak{B}, & 0, & 0 \end{array} \right)$. Hier bedeutet $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ alle reducirten positiven binären Formen mit der Determinante $-3D$, in denen $\mathfrak{B}$ nicht negativ und $\mathfrak{A} > 7$, d. h. mindestens $= 8$ ist; jeder derselben entspricht eine ternäre, deren Art sich aus dem Verhalten von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \pmod{3}$ bestimmt. Ausnahmefälle: für die erste Art ist die Combination $\mathfrak{A} = 8, \mathfrak{B} = 3$, für die fünfte Art die Combination $\mathfrak{A} = 9, \mathfrak{B} = 3$ zu verwerfen; diejenigen Formen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$, in denen $\mathfrak{A}$, oder $\mathfrak{C}$, oder beide $\equiv 1 \pmod{3}$, sind, wie man sieht, ganz zu verwerfen. Diese Regeln sind vollkommen streng und mit Berücksichtigung aller Haupt- und Nebenfälle aus den Grundbedingungen der reducirten Formen abgeleitet worden. Da die Tabelle, soweit sie von *Seeber* berechnet worden ist, nämlich bis zur Determinante -25 , keine einzige Form enthält, deren erster Coëfficient $a > 3$ ist, so kann dieser Theil derselben schon nach den eben gegebenen Vorschriften allein mit großer Leichtigkeit construirt werden. Für größere Werthe von a möchte das gewöhnliche Verfahren vorzuziehen sein; der Werth $a = 4$ kommt unter den eigentlich primitiven Formen zum ersten Male bei der Determinante -44 , unter den uneigentlich primitiven bei der Determinante -36 vor.

Endlich ist zur Bestimmung oberer Grenzen für die Coëfficienten a, a', a'' der von *Seeber* durch Induction aus seiner Tabelle gefundene, durch *Gauß* zuerst bewiesene Satz benutzt worden, daß immer $aa'a'' \leq 2D$ ist. Hieraus folgt $a \leq \sqrt[3]{2D}$, $a' \leq \sqrt{\left(\frac{2D}{a}\right)}$ und $a'' \leq \frac{2D}{aa'}$. Bis zur Determinante -13 reicht man demnach mit $a = 1$ und $a = 2$ aus; von $D = 14$ bis $D = 31$ muß außerdem $a = 3$ versucht werden; von $D = 32$ bis 62 kommt noch $a = 4$, von 63 bis 107 noch $a = 5$ hinzu. Größere Werthe, als $a = 5$ können also nicht in der Tabelle angetroffen werden.

§. 3.

Zweite Methode der Berechnung.

Bei der zweiten Methode zur Berechnung der größeren Tabelle wurden, ohne Rücksicht auf specielle Werthe der Determinante, überhaupt

alle Combinationen der sechs Coëfficienten aufgestellt, welche den obigen charakteristischen Ungleichheiten Genüge leisten; für jede dieser Combinationen wurde der Werth von

$$D = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2$$

berechnet; diejenigen Combinationen, für welche sich $D > 100$ ergab, wurden verworfen, die übrigen am passenden Orte in der Tabelle eingetragen. Bei der wirklichen Aufstellung gewährte der Umstand wesentliche Erleichterung, daß die Werthe der Determinante eine *arithmetische Progression* bilden, wenn einer der drei obern Coëfficienten a , a' oder a'' bei unveränderten Werthen der übrigen fünf Coëfficienten die natürliche Zahlenreihe durchläuft; in der That kann man der Gröfse D die folgenden drei linearen Formen geben:

$$D = 2bb'b'' - a'b'^2 - a''b''^2 + a(a'a'' - b^2) = K + aL,$$

$$D = 2bb'b'' - ab^2 - a''b''^2 + a'(aa'' - b'^2) = K' + a'L',$$

$$D = 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 + a''(aa' - b''^2) = K'' + a''L'',$$

in denen K und L nicht von a ; K' , L' nicht von a' , endlich K'' , L'' nicht von a'' abhängen; namentlich ist $aa' - b''^2$ die Differenz der arithmetischen Reihe, welche die Determinanten für ein wachsendes a'' bilden. Als am meisten practisch erwies sich folgende Einrichtung. Den Werthen $a = 1, 2, 3, 4, 5$ wurden nach und nach alle den Bedingungen $a \leq a' \leq \sqrt{\left(\frac{200}{a}\right)}$ genügenden Werthe von a' zugesellt, so daß die folgenden 35 Combinationen für a, a' innerhalb der Grenzen der Tabelle zu betrachten waren:

1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 1, 7; 1, 8; 1, 9; 1, 10; 1, 11; 1, 12;

1, 13; 1, 14; 2, 2; 2, 3; 2, 4; 2, 5; 2, 6; 2, 7; 2, 8; 2, 9; 2, 10;

3, 3; 3, 4; 3, 5; 3, 6; 3, 7; 3, 8; 4, 4; 4, 5; 4, 6; 4, 7; 5, 5; 5, 6.

Jeder dieser 35 Combinationen entspricht ein besonderer Theil der Arbeit, der seinerseits aus der Bildung mehrerer Zeilen besteht, die den für die geltende Combination a, a' möglichen Werthen von b, b', b'' entsprechen; letztere sind 1) alle positiven Combinationen, die den Ungleichheiten $b \leq \frac{1}{2}a'$, $b' \leq \frac{1}{2}a$, $b'' \leq \frac{1}{2}a$ genügen, 2) alle nicht positiven Combinationen $-b, -b', -b''$, die diesen und außerdem der Ungleichheit $b + b' + b'' \leq \frac{1}{2}(a + a')$ genügen, wenn man in beiden Fällen diejenigen Combinationen verwirft, welche mit den oben angegebenen Nebenbedingungen unverträglich sind. Links am Rande der zur Aufnahme der arithmetischen Reihen bestimmten Zeilen wurden die zusammengehörigen Werthe von b, b', b'' geschrieben; oben über den Zeilen

und gemeinschaftlich für alle die laufenden Werthe von $a'' = a', a' + 1, a' + 2, a' + 3, \dots$; sodann war es nöthig, die Determinante für den kleinsten Werth von a'' , nämlich $a'' = a'$, also $2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 + a'(aa' - b''^2)$, welches die erste Zahl in jeder Zeile ergibt, und die Differenz der Reihen $aa' - b''^2$ zu bestimmen. Nachdem diese beiden Stücke für jede Zeile berechnet waren, wurden die verschiedenen arithmetischen Reihen in den respectiven Zeilen durch fortgesetzte Addition der gefundenen Differenz so weit gebildet, als es für die Grenzen der Tabelle nöthig war, und dies letztere wurde einfach dadurch erreicht, dafs man vor der ersten, über 100 liegenden Zahl abbrach. Von den in jeder Zeile die erste Stelle einnehmenden Determinanten war noch zu bemerken (da für dieselben $a'' = a'$ ist), dafs diejenigen unter ihnen verworfen werden mußten, für welche der absolute Werth von b' den von b'' übertrifft; alle übrigen Determinanten entsprachen wirklich reducirten Formen, die aus dem Ort, den die Determinante einnimmt, sogleich zu erkennen sind; mit Übergehung der nicht primitiven Formen wurden die eigentlichen in der ersten Tabelle, die uneigentlichen in der zweiten Tabelle unter ihren Determinanten verzeichnet. Diese Methode ist in gewissem Sinne die umgekehrte der ersten, indem nicht zu den Determinanten die Formen, sondern zu den Formen die Determinanten bestimmt wurden. Zu gröfserer Deutlichkeit lasse ich denjenigen Theil der Rechnung, welcher aus der Combination $a = 4, a' = 4$ entspringt, mit abdrucken; hier erhalten die untern Coëfficienten den Werth 1 oder 2, wenn alle drei positiv sind, und die Werthe 0, -1 oder -2 , wenn alle drei nicht positiv sind, im letzteren Falle noch mit der Beschränkung, dafs die Summe ihrer absoluten Werthe ≤ 4 sein mufs, dafs also der absolute Werth von $\Sigma b = b + b' + b''$ nur die Werthe 0, 1, 2, 3 oder 4 haben darf; da $a = a' = 4$, so müssen noch diejenigen Combinationen verworfen werden, in welchen der absolute Werth von b den von b' übertrifft; wenn endlich einer der drei untern Coëfficienten den Werth ± 2 , also genau die Hälfte von a oder a' hat, oder wenn genau $-\Sigma b = \frac{1}{2}(a + a') = 4$ war, so mußten noch die oben angegebenen, leicht zu erkennenden Nebenbedingungen erfüllt sein; aus letzterem Grunde fielen noch die Combinationen 0, $-1, -2$; 0, $-2, -1$; 0, $-2, -2$; $-1, -1, -2$; $-1, -2, -1$ fort, und es blieben die folgenden, zu denen die Differenz der arithmetischen Reihen $16 - b''^2$, also 16, 15 oder 12, je nachdem $b'' = 0, \pm 1$ oder ± 2 , und ihre Anfangsglieder $64 + 2bb'b'' - 4(b^2 + b'^2 + b''^2)$, berechnet wurden:

$a = 4, \quad a' = 4$				$a'' =$					
4	4	(4)		4	5	6	7	8	9
b	b'	b''	Diff.						
1	1	1	15	54	69	84	99		
1	1	2	12	44	56	68	80	92	
1	2	1	15	44*	59	74	89		
1	2	2	12	36	48	60	72	84	96
2	2	1	15	36*	51	66	81	96	
2	2	2	12	32'	44	56'	68	80'	92
0	0	0	16	64'	80	96'			
0	0	-1	15	60	75	90			
0	0	-2	12	48'	60	72'	84	96'	
0	-1	0	16	60*	76	92			
0	-1	-1	15	56	71	86			
0	-2	0	16	48*	64	80'	96		
-1	-1	0	16	56*	72	88			
-1	-1	-1	15	50	65	80	95		
-1	-2	0	16	44*	60	76	92		
-2	-2	0	16	32*	48	64'	80	96'	

Für die mit einem Stern versehenen Determinanten übertrifft der absolute Werth von b' den von b'' , während $a' = a''$, für die mit einem Accent versehenen ist die Form nicht primitiv; für alle übrigen sind die entsprechenden Formen einzutragen; so giebt die erste Zeile die Formen $(4, 4, 4)$, $(4, 4, 5)$, $(4, 4, 6)$, $(4, 4, 7)$ mit den Determinanten resp. — 54, — 69, — 84, — 99; die zweite Zeile giebt die Formen $(4, 4, 4)$, $(4, 4, 5)$, $(4, 4, 6)$, $(4, 4, 7)$, $(4, 4, 8)$, mit den Determinanten resp. — 44, — 56, — 68, — 80, — 92, u. s. w. f. Dieser und eben so jeder der 35 andern Theile der bisherigen Arbeit behält seine Brauchbarkeit, wenn die Grenzen der Tabelle später einmal erweitert werden sollen, man hat dann nur die bereits angefangenen arithmetischen Reihen weiter fortzusetzen; allerdings treten immer neue Combinationen a , a' , also immer neue Theile der Arbeit hinzu, aber für die bereits vorhandenen Combinationen ist deshalb keine andere Rechnung als die Fortsetzung der arithmetischen Reihen erforderlich, weil die Werthe von b , b' , b'' nicht von der Gröfse der Determinante, und namentlich nicht von der Gröfse des Coëfficienten a'' , sondern nur von a und a' abhängen.

Durch verschiedene mechanische Hilfsmittel könnte man die ganze Arbeit noch bedeutend erleichtern: der ermüdenden Operation des wiederholten Schreibens derselben Zahlen könnte man durch den Druck zu Hülfe kommen, indem man sich für jede Combination a, a', b, b', b'' bedruckte Blättchen Papier, wie z. B.

$$\begin{pmatrix} 4, & 4, & \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$$

mit einem offenen Felde zum späteren Hineinschreiben des Werthes von a'' in hinreichender Anzahl verschaffte; ferner könnte man einen Kasten in eine Reihe von etwa quadratisch angeordneten Fächern eintheilen, welche die Nummern 1, 2, 3, ... bis zu der Grenze der anzufertigenden Tabelle tragen, und dann jedes Blättchen nach Ausfüllung der leeren Stelle mit dem Werthe von a'' in dasjenige Fach legen, dessen Nummer mit der in der arithmetischen Progression auftretenden Determinante übereinstimmt; um jede spätere Verwechslung zu vermeiden, könnte man noch beim Hineinlegen jedes Blättchen auf der Rückseite mit seiner Determinante bezeichnen. Nach vollendeter Arbeit findet man in jedem Fache die zu dieser Determinante gehörigen reducirten Formen auf einzelnen Blättchen, welche man dann in passender Ordnung hintereinander aufkleben kann. Die Kosten eines solchen Apparates in größerem Maafsstabe, so wie eines ähnlichen für die binären Formen, würden wie ich glaube nicht bedeutend sein. Jedenfalls ist selbst ohne Hülfe von dergleichen mechanischen Vorrichtungen, die zweite Methode der ersten bei weitem vorzuziehen.

§. 4.

Controle durch Vergleichung beider Methoden und durch Prüfung des Maafses.

Als *erste Controle* ergab sich naturgemäfs die Vergleichung der aus der zweiten mit den aus der ersten Methode hervorgegangenen Formen; sie wurde beim Rangiren der aus der zweiten erhaltenen Formen nach ihren Determinanten angestellt; nur ein paar Mal ergab sich eine Differenz, dann wurde sorgfältig nachgerechnet, um den Fehler zu entdecken und zu verbessern. Durch dieses Mittel war es jedoch nicht möglich zu entscheiden, ob nicht vielleicht trotz aller Sorgfalt dieselbe Form beiden Methoden zugleich entgangen wäre. Diesem Mangel wurde durch die *zweite* und *dritte Controle* ab-

geholfen, welche sich auf die von mir gefundenen, theoretisch bewiesenen Sätze gründen.

Diese Sätze beziehen sich theils auf die Anzahl, theils auf das Maafs der zu einer Determinante gehörigen reducirten Formen (Classen). Zur Benutzung der Sätze erster Art war nur die Abzählung der Formen erforderlich; für die Anwendung der auf das Maafs bezüglichen Sätze müssen einige Definitionen und ausserdem die Berechnung der Werthe von δ (s. §. 6.) vorausgesetzt werden. Für jede positive ternäre Form existirt eine gewisse endliche Anzahl linearer Substitutionen mit der Systemsdeterminante $+1$, durch welche dieselbe in sich selbst transformirt werden kann; diese Anzahl, welche irgend ein Divisor der Zahl 24, ausser 3, sein kann, zeigt zugleich an, wie oft, d. h. durch wie viele Substitutionen jede andere Form derselben Classe in sich selbst oder in jede äquivalente Form transformirt werden kann, sie ist also eine der ganzen Classe zugehörige Zahl, welche eben so wie die Determinante für alle äquivalenten Formen denselben Werth behält. Den reciproken Werth $\frac{1}{\delta}$ dieser Anzahl nenne ich das Maafs oder die Dichtigkeit der Form oder Classe, ein Begriff, dessen Entstehung ich in *Crelle's Journal* (Band 35 Seite 120) näher motivirt habe. Die Summe aller dieser Brüche $\sum \frac{1}{\delta}$, über die zu einer Determinante gehörigen verschiedenen Formen (Classen) ausgedehnt, bildet das Maafs für die Gesamtheit dieser Formen, oder kurz das Maafs für diese Determinante, und unterliegt einfachen von mir gefundenen Gesetzen. Die einfachsten der hierher gehörigen Sätze sind in folgender Tafel enthalten; $\mathfrak{M}$ bedeutet das Maafs für die eigentlich primitiven, $\mathfrak{M}'$ das für die uneigentlich primitiven Formen; die Determinante wird immer durch $-D$ bezeichnet, und P bedeutet irgend eine positive ungerade Zahl ohne quadratischen Theiler, also ein Product verschiedener ungerader Primzahlen, welches auch $=1$ sein kann, q eine nicht in P aufgehende, von 1 verschiedene ungerade Primzahl. Obwohl diese Tafel von Lehrsätzen nicht auf Vollständigkeit Anspruch machen kann, so ist sie doch für die Controlirung der Tabelle der ternären Formen innerhalb der ihr hier gesteckten Grenzen vollkommen ausreichend *).

*) Allgemeinere Sätze findet man a. a. O. im 35. Bande des *Crelleschen Journals*.

Diese Zahlen sind gefunden worden, indem mit jedem Werthe von δ in 24 dividirt und die Summe der Quotienten für die einzelnen Determinanten berechnet wurde; z. B. unter der Determinante —13 findet man in dem ersten Theil der gröfseren Tabelle folgende Formen mit ihren zugehörigen Transformations - Anzahlen:

$$\begin{matrix} (1, 1, 13) \\ (0, 0, 0) \end{matrix}, \begin{matrix} (1, 2, 7) \\ (-1, 0, 0) \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 2, 5) \\ (1, 1, 1) \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 3, 3) \\ (-1, 0, -1) \end{matrix};$$

$\delta=8 \qquad \delta=4 \qquad \delta=6 \qquad \delta=2$

dividirt man hier mit den Werthen von δ , nämlich mit 8, 4, 6, 2, der Reihe nach in 24, so findet man die Quotienten resp. 3, 6, 4, 12, deren Summe 25 beträgt, und diese Zahl 25 steht oben unter der Determinante 13, nämlich an derjenigen Stelle, wo die Verticalreihe 3 die Horizontalreihe 1 durchschneidet. Auf dieselbe Weise sind die folgenden Zahlen aus dem zweiten Theile der grossen Tabelle gewonnen worden.

Tafel der Werthe von $24\mathfrak{M}'$ für die uneigentlich primitiven Formen.

D	0	2	4	6	8
0	—	—	1	2	—
1	4	5	6	4	2
2	9	10	8	12	13
3	14	—	16	14	18
4	16	20	21	22	20
5	4	25	26	24	28
6	29	30	16	32	33
7	34	8	36	37	38
8	36	40	41	42	40
9	50	45	46	32	6
10	34				

Über die Bestimmung der einzelnen Transformations - Anzahlen δ selbst, welche als Elemente dieser Berechnung zu Grunde gelegt werden, siehe §. 6.

Ziehen wir zunächst aus der ersten Tafel diejenigen Werthe von D mit den zugehörigen von $24\mathfrak{M}$, welche ungerade sind und keinen quadratischen Theiler enthalten,

$$\begin{aligned} D &= 1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 11 \ 13 \ 15 \ 17 \ 19 \ 21 \ 23 \ 29 \ 31 \ 33 \ 35 \ 37 \ 39 \ 41 \ 43 \ 47 \\ 24\mathfrak{M} &= 1 \ 5 \ 9 \ 13 \ 21 \ 25 \ 29 \ 33 \ 37 \ 41 \ 45 \ 57 \ 61 \ 65 \ 69 \ 73 \ 77 \ 81 \ 85 \ 93 \\ D &= 51 \ 53 \ 55 \ 57 \ 59 \ 61 \ 65 \ 67 \ 69 \ 71 \ 73 \ 77 \ 79 \ 83 \\ 24\mathfrak{M} &= 101 \ 105 \ 109 \ 113 \ 117 \ 121 \ 129 \ 133 \ 137 \ 141 \ 145 \ 153 \ 157 \ 165 \\ D &= 85 \ 87 \ 89 \ 91 \ 93 \ 95 \ 97 \\ 24\mathfrak{M} &= 169 \ 173 \ 177 \ 181 \ 185 \ 189 \ 193 \end{aligned}$$

so bemerkt man, daß jede Zahl der zweiten Reihe aus der darüber stehenden der ersten Reihe entspringt, wenn man das Doppelte der letzteren um 1 vermindert; dies bestätigt die Formel $\mathfrak{M} = \frac{1}{2}P(2P-1)$ für $D=P$. Wenn man ferner für alle Determinanten von der Form $2P$ aus der ersten Tafel die Werthe von $\mathfrak{M}$, aus der zweiten die von $\mathfrak{M}'$ zusammenstellt, indem man den ersteren den Nenner 8, den letzteren den Nenner 24 giebt, so erhält man folgende Zähler:

$$\begin{aligned} D &= 2 \quad 6 \quad 10 \quad 14 \quad 22 \quad 26 \quad 30 \quad 34 \quad 38 \quad 42 \\ 8\mathfrak{M} &= 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \quad 21 \\ 24\mathfrak{M}' &= 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \\ D &= 46 \quad 58 \quad 62 \quad 66 \quad 70 \quad 74 \quad 78 \quad 82 \quad 86 \quad 94 \\ 8\mathfrak{M} &= 23 \quad 29 \quad 31 \quad 33 \quad 35 \quad 37 \quad 39 \quad 41 \quad 43 \quad 47 \\ 24\mathfrak{M}' &= 22 \quad 28 \quad 30 \quad 32 \quad 34 \quad 36 \quad 38 \quad 40 \quad 42 \quad 46; \end{aligned}$$

und hier ist in der That, wie es nach den Formeln $\mathfrak{M} = \frac{1}{8}P$, $\mathfrak{M}' = \frac{1}{24}(P-1)$ für $D=2P$ der Fall sein muß, jede Zahl der zweiten Zeile die Hälfte der entsprechenden der ersten, und jede der dritten Zeile um Eins kleiner als die darüber stehende. Für die Determinanten von der Form $D=4P$ wird die entsprechende Zusammenstellung

$$\begin{aligned} D &= 4 \quad 12 \quad 20 \quad 28 \quad 44 \quad 52 \quad 60 \quad 68 \quad 76 \quad 84 \quad 92 \\ 12\mathfrak{M} &= 3 \quad 13 \quad 23 \quad 33 \quad 53 \quad 63 \quad 73 \quad 83 \quad 93 \quad 103 \quad 113 \\ 24\mathfrak{M}' &= 1 \quad 5 \quad 9 \quad 13 \quad 21 \quad 25 \quad 29 \quad 33 \quad 37 \quad 41 \quad 45; \end{aligned}$$

diese Werthe genügen wirklich den Formeln $\mathfrak{M} = \frac{1}{12}(5P-2)$, $\mathfrak{M}' = \frac{1}{24}(2P-1)$. Für die ungeraden Quadratzahlen $D=9, 25, 49$ erhält man die Werthe resp. $24\mathfrak{M}=14, 34, 62$, und für die doppelten Zahlen $D=18, 50, 98$ die Werthe resp. $8\mathfrak{M}=12, 30, 56$, $24\mathfrak{M}'=2, 4, 6$, welche ebenfalls mit den entsprechenden Formeln in Übereinstimmung stehen. — Die Prüfung der wenigen noch übrigen Determinanten nach den obigen Formeln bleibe dem Leser überlassen; man wird innerhalb der Grenzen der Tabelle keine Determinante finden, welche nicht unter einem der Fälle enthalten wäre, für welche oben der allgemeine Ausdruck des Maasses aufgestellt worden ist.

Diese Art der Controle, so wie die des folgenden Paragraphen, war sowohl für mich sehr interessant, da sie die Richtigkeit meiner Sätze fortwährend bestätigte, als auch deshalb von besonderer practischer Wichtigkeit, weil sie zunächst das einzige Mittel an die Hand gab, die Aufmerksamkeit auf etwa in der Tabelle fehlende Formen zu lenken. Denn für die einmal auf-

gestellten Formen konnte man sich leicht überzeugen: 1) durch bloßen Anblick ihrer Coëfficienten, daß sie wirklich *reducirt* sind; 2) durch wirkliche abermalige Berechnung ihrer Determinante, daß sie an richtiger Stelle in der Tabelle eingetragen sind; an ihrer *Vollzähligkeit* blieb jedoch erst dann kein Zweifel mehr, wenn das Maafs für die Gesammtheit derselben mit dem durch die Theorie gegebenen Werthe übereinstimmte; zu groß konnte dasselbe nach dem eben Bemerkten nicht sein, es handelte sich darum, ob es auch nicht zu klein war, in welchem Falle auf die Abwesenheit einer oder mehrerer reducirten Formen hingedeutet worden wäre. Zum Überflufs wurde die Vollzähligkeit der aufgestellten Formen erwiesen, wenn ausserdem ihre Anzahl mit den theoretischen Sätzen über dieselbe in Übereinstimmung befunden wurde.

§. 5.

Controle durch die Anzahl der Formen.

Die Sätze über die Anzahl der zu derselben Determinante gehörigen Classen nichtäquivalenter Formen, welche mit der Anzahl der reducirten Formen übereinstimmt, waren sehr verborgen und äufserst schwierig aufzufinden. Indem ich die Entwicklung der Principien, welche mich auf diese und analoge Sätze für mehr als 3 Variabeln geführt haben, so wie die weitere Durchführung des Gegenstandes einer späteren Gelegenheit vorbehalte, beschränke ich mich hier auf die Angabe der allgemeinen Form des Resultates und dessen specieller Gestaltung in den einfachsten Fällen. In allen Fällen, die Determinante mag zusammengesetzt sein, wie sie wolle, wird die Anzahl der Classen *ternärer* positiver Formen für die Determinante — D auf die Anzahl der Classen *binärer* Formen für solche negative Determinanten zurückgeführt, deren absolute Werthe mit D , $2D$ oder *Theilern* dieser beiden Zahlen zusammenfallen. Bezeichnet man Kürze halber durch $H(D)$ die Anzahl der nichtäquivalenten (reducirten) *eigentlich* primitiven positiven *ternären* Formen für die Determinante — D , durch $H'(D)$ die entsprechende Anzahl für die *uneigentlich* primitiven Formen, ferner durch $h(D)$, $h'(D)$ die Anzahl der resp. *eigentlich*, *uneigentlich* primitiven nichtäquivalenten positiven *binären* Formen für die Determinante — D , so erhält man für die einfachsten Fälle, wenn die Determinante ohne quadratischen Theiler angenommen wird:

$$H(P) = \frac{1}{4}(\sum h(d) + \sum h'(d) + \sum h(2d)) + \frac{1}{12}(P + \lambda),$$

$$H(2P) = \frac{1}{2} \sum h(d) + \frac{1}{4} \sum h(2d) + \frac{1}{8}(P + \nu),$$

$$H'(2P) = \frac{1}{4}(\sum h(d) + \sum h'(d)) + \frac{1}{24}(P + \varphi),$$

wo P ein Product verschiedener ungerader Primzahlen, d den Inbegriff der sämtlichen von 1 verschiedenen Divisoren von P mit Einschluss von P selbst bedeutet, und die Summationen rechts sich auf die so definirten Werthe von d beziehen; die Buchstaben λ , ν , ϱ bedeuten ganze Zahlen, welche nur vom Reste von P (mod. 12) abhängen, nämlich es ist $\lambda = 9$, $\lambda = 11$ oder $\lambda = 7$, je nachdem $P \equiv 0$ (mod. 3), $P \equiv 1$ (mod. 3) oder $P \equiv 2$ (mod. 3); $\nu = 7$ oder $= 5$, je nachdem $P \equiv 1$ oder $\equiv 3$ (mod. 4);

$$\varrho = -1, 9, 7, 5, 3, 13 \text{ für resp.,}$$

$$P \equiv 1, 3, 5, 7, 9, 11 \text{ (mod. 12);}$$

welche Fälle sich mit Hülfe des *Legendreschen* Zeichens in

$$\lambda = 9 + 2\left(\frac{P}{3}\right), \quad \nu = 6 + \left(\frac{-1}{P}\right) = 6 + (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)}, \quad \varrho = 6 - 3(-1)^{\frac{1}{2}(P-1)} - 4\left(\frac{P}{3}\right)$$

zusammenziehen lassen, wo $\left(\frac{P}{3}\right) = 0$ zu setzen, wenn P durch 3 theilbar ist.

Obwohl diese Formeln für eine Determinante mit quadratischen Theilern mannigfach modificirt werden müssen, hat doch das Resultat, wie schon bemerkt, immer eine ähnliche Form, indem zur Bestimmung von $H(D)$ nur die Kenntniss der Werthe binärer Classenzahlen h , h' für sämtliche Theiler von $2D$ verlangt wird, und es können diese complicirteren Fälle mittelst der von mir angewandten Principien ebenfalls vollständig ergründet werden; doch muss ich gestehen, dass ich diese Fälle noch nicht so weit entwickelt habe, um alle Resultate in fertiger Form hier vorzulegen.

Wenn beiläufig die Determinante eine ungerade Primzahl $-D = -p$ ist, so lässt sich der Satz $H(p) = \frac{1}{4}(h(p) + h'(p) + h(2p)) + \frac{1}{2}(p + \lambda)$, wo $\lambda = 9$, wenn $p = 3$, $\lambda = 11$ oder 7 , je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 2$ (mod. 3), in einer andern für die Controlirung der Tabelle sehr geeigneten Form aussprechen: „Bezeichnet man durch α die Anzahl der reducirten Formen mit der Determinante $-p$, für welche $a = 1$ oder $a = 2$ ist, durch β die Anzahl der übrigen reducirten Formen derselben Determinante, für welche $a > 2$, so ist $\alpha + 2\beta = \frac{1}{6}(p + \lambda)$.“ So findet man z. B. unter $D = 67$ in der Tabelle 9 Formen, deren erster Coëfficient 1 oder 2 ist, und 2 Formen mit größern ersten Coëfficienten ($a = 3, 4$); hier ist $\lambda = 11$ und wirklich $\frac{1}{6}(67 + 11) = 13 = 9 + 2 \cdot 2$. Dieser Satz ist um so merkwürdiger, da er sich ganz von der Theorie der ternären und binären Formen trennen und bloß als eine Eigenschaft der Combinationen von 6 ganzen Zahlen a, a', a'', b, b', b'' darstellen lässt, für welche

die Ungleichheiten des (§. 2.) erfüllt sind, und der Werth des Ausdrucks

$$aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2$$

eine gegebene ungerade Primzahl wird. Im Vorbeigehen will ich darauf aufmerksam machen, wie man bei dieser Gelegenheit durch Induction getäuscht werden kann; für eine Menge von Primzahlen findet sich $h(p) + h'(p) + h(2p) = \frac{1}{3}(p + \lambda)$, es wäre dies ein sehr merkwürdiger Satz, aber er ist nur dann richtig, wenn $\beta = 0$, was freilich am Anfange sehr häufig der Fall ist.

Mit Zuziehung der von *Dirichlet* im 19ten und 21ten Bande des *Crelle*-schen Journals entwickelten Sätze über die binären Formen kann man aus den obigen Formeln die Classenzahlen h , h' gänzlich eliminiren und auf diese Weise durch Verbindung zweier Theorien neue Sätze über H und H' erhalten, von welchen ich Kürze halber nur die beiden Fälle beispielsweise anführe, dafs für eine Primzahl p von der Form $8n + 7$

$$H(p) = \frac{1}{2}(A - B + A' - B') + \frac{1}{12}(p + \lambda),$$

und für eine Primzahl $p = 8n + 3 > 3$

$$H(p) = \frac{1}{3}(A - B) + \frac{1}{2}(A' - B') + \frac{1}{12}(p + \lambda)$$

erhalten wird, wo A , B die Anzahl der quadratischen Reste resp. Nichtreste unter $\frac{1}{2}p$, A' , B' die Anzahl derselben Gröfsen bedeutet, welche zwischen $\frac{1}{3}p$ und $\frac{2}{3}p$ liegen.

Der Einfachheit halber stelle ich hier nicht für alle Determinanten, sondern nur für $D = P$ und $D = 2P$ die aus der gröfseren Tabelle hervorgehenden Werthe von $H(P)$, $H(2P)$ und $H'(2P)$ für alle Werthe von $P < 50$ zusammen, welche man an den obigen Sätzen vollständig prüfen kann; um diese Vergleichung, die ich dem Leser überlassen will, zu erleichtern, sind zugleich die Werthe von $h(P)$, $h'(P)$ und $h(2P)$ beigefügt, so wie diejenigen der Zahlen λ , ν , ρ ; z. B. irgend eine Zahl der zweiten Verticalcolumnne $H(P)$ mufs sich ergeben, wenn man für den entsprechenden Werth von P und für dessen sämtliche Factoren aufser 1 die in der 5ten, 6ten und 7ten Verticalcolumnne befindlichen Zahlen addirt und zum vierten Theile der Summe $\frac{1}{12}(P + \lambda)$ hinzufügt:

P	Ternäre Classenzahlen			Binäre Classenzahlen			λ	ν	ρ
	$H(P)$	$H(2P)$	$H'(2P)$	$h(P)$	$h'(P)$	$h(2P)$			
1	1	1	0	1	0	1	11	7	—1
3	2	2	1	1	1	2	9	5	9
5	2	3	1	2	0	2	7	7	7
7	3	3	1	1	1	4	11	5	5
11	3	4	2	3	1	2	7	5	13
13	4	5	1	2	0	6	11	7	—1
15	6	7	3	2	2	4	9	5	9
17	4	6	2	4	0	4	7	7	7
19	5	6	2	3	1	6	11	5	5
21	7	9	3	4	0	4	9	7	3
23	5	6	3	3	3	4	7	5	13
29	5	8	3	6	0	2	7	7	7
31	7	8	3	3	3	8	11	5	5
33	9	12	4	4	0	8	9	7	3
35	9	12	5	6	2	4	7	5	13
37	7	9	2	2	0	10	11	7	—1
39	10	12	5	4	4	4	9	5	9
41	7	11	4	8	0	4	7	7	7
43	8	10	3	3	1	10	11	5	5
47	9	11	5	5	5	8	7	5	13

Da es wünschenswerth erschien, ein größeres, die Grenzen der Tabelle überschreitendes Beispiel vor Augen zu haben, so stellte ich die reducirten Formen für die Determinante $-385 = -5 \cdot 7 \cdot 11 = -P$ auf, welche ich am Schlusse der größeren Tabelle beigelegt habe. Es fanden sich 15 Formen mit der Determinante -385 , deren Transformations-Anzahl $\delta = 1$ beträgt, 25 bei derselben Determinante, für welche $\delta = 2$, ferner 17 Formen mit $\delta = 4$, und je eine mit $\delta = 6$, $\delta = 8$. Was zunächst das Maafs betrifft, so ist also $\mathfrak{N}(385) = 15 + \frac{25}{2} + \frac{17}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{769}{24}$, und die Zahl 769 ist wirklich, wie es sein muß, $= 2 \cdot 385 - 1 = 2P - 1$. Zur Prüfung der Total-Anzahl $59 = H(385)$ aller reducirten Formen sind die Werthe der binären Classenzahlen $h(d)$, $h'(d)$, $h(2d)$ für die Divisoren $d = 5, 7, 11, 35, 55, 77, 385$ von 385 erforderlich, man findet:

$$\begin{array}{rcl}
 d & = & 5, 7, 11, 35, 55, 77, 385 \\
 h(d) & = & 2, 1, 3, 6, 4, 8, 8 \\
 h'(d) & = & 0, 1, 1, 2, 4, 0, 0 \\
 h(2d) & = & 2, 4, 2, 4, 12, 8, 32 \\
 \hline
 \text{Summe} & = & 4 + 6 + 6 + 12 + 20 + 16 + 40;
 \end{array}$$

die Summe aller dieser Zahlen beträgt $\sum \{h(d) + h'(d) + h(2d)\} = 104 = 4.26$, und da $385 \equiv 1 \pmod{3}$, also $\lambda = 11$, $P + \lambda = 396 = 12.33$, so muß $26 + 33 = 59$ sein, wie in der That.

Sollte später einmal die Tabelle der reducirten Formen über ihre jetzigen Grenzen hinaus fortgesetzt werden, so besteht ein neuer in practischer Hinsicht nicht zu verachtender Vorthail der obigen Sätze darin, daß man durch Kenntniß der Formen-*Anzahl* in Stand gesetzt ist, von vorn herein für jede Determinante den gerade nöthigen Raum zur Aufnahme der ihr zugehörigen Formen in der Tabelle beurtheilen zu können.

Bei den ternären Formen wird durch die hier aufgestellten Sätze und ähnliche, so wie auch durch die Sätze des vorigen Paragraphen, die Richtigkeit derjenigen Behauptung unzweifelhaft bewiesen, welche bei den binären Formen, wo sie von *Gauß*s angeregt worden ist, so großen Schwierigkeiten unterliegt: daß nämlich die Classenzahl mit der Determinante in solcher Weise individuell wächst, daß man immer eine Grenze finden kann, über welche hinaus die Anzahl der Classen für alle folgenden Determinanten größer ist, als eine vorher beliebig und noch so groß gegebene Zahl; es geht dies sowohl aus den Formeln für H selbst hervor, als auch daraus, daß offenbar $H > \mathfrak{M}$ ist, und für $\mathfrak{M}(D)$ seinerseits eine einfache wachsende Function von D als untere Grenze angegeben werden kann. Bei wachsendem D ist von den beiden Bestandtheilen, aus welchen H zusammengesetzt ist, derjenige, welcher nur eine einfache Function der Determinante enthält, von höherer Ordnung, als der andere, welcher von den binären Classenzahlen abhängt, und H wird zuletzt mit ersterem allein proportional wachsen *); für ein unendlich großes D kann man $H = \mathfrak{M}$ setzen; diese und ähnliche approximative oder asymptotische Gesetze gehen leicht aus den von *Dirichlet* gegebenen Principien hervor. Folgende Tafel gewährt eine Übersicht über die Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Classenzahlen innerhalb der Grenzen der größeren Tabelle. Die Reihen von Determinanten, für welche $H = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ oder 8 , sind für die eigentlich primitiven Formen als abgeschlossen zu betrachten, und man wird bei der Fortsetzung der Tabelle keine Determinante finden, zu welcher weniger als neun reducirte Formen gehören. Um möglichst hohe Grenzen zu ziehen, wird man die verschiedenen Fälle der Determinante einzeln betrachten müssen.

*) z. B. für Det. ohne quadratischen Theiler ist immer $H(P) > \frac{1}{12}P$, $H(2P) > \frac{1}{8}P$ und im Unendl. genau $H(P) = \frac{1}{12}P$, $H(2P) = \frac{1}{8}P$.

Eigentlich primitive Formen.

Die Anzahl	kommt vor	Product	bei den Determinanten — D , für $D =$
1	2 mal	2	1, 2.
2	4 -	8	3, 4, 5, 6.
3	4 -	12	7, 10, 11, 14.
4	5 -	20	8, 9, 13, 17, 22.
5	4 -	20	19, 23, 26, 29.
6	7 -	42	12, 15, 18, 25, 34, 38, 46.
7	6 -	42	16, 21, 30, 31, 37, 41.
8	5 -	40	20, 43, 53, 58, 62.
9	8 -	72	27, 28, 33, 35, 42, 47, 49, 74.
10	6 -	60	24, 39, 50, 59, 61, 86.
11	6 -	66	51, 54, 67, 71, 82, 94.
12	8 -	96	32, 57, 65, 66, 70, 73, 78, 79.
13	5 -	65	44, 52, 55, 83, 89.
14	4 -	56	36, 40, 69, 77.
15	4 -	60	45, 85, 97, 98.
16	2 -	32	56, 81.
17	6 -	102	64, 68, 87, 91, 93, 95.
18	1 -	18	76.
19	2 -	38	63, 75.
20	2 -	40	48, 88.
21	2 -	42	90, 92.
22	2 -	44	60, 100.
24	1 -	24	99.
26	1 -	26	84.
28	2 -	56	72, 80.
33	1 -	33	96.
Summa	100 -	1116	

Uneigentlich primitive Formen.

Die Anzahl	kommt vor	Product	bei den Determinanten — D , für $D =$
1	9 mal	9	4, 6, 10, 14, 16, 18, 26, 50, 98.
2	10 —	20	12, 20, 22, 24, 34, 38, 40, 64, 72, 74.
3	11 —	33	28, 30, 42, 44, 46, 48, 56, 58, 62, 80, 86.
4	6 —	24	36, 52, 66, 68, 82, 96.
5	7 —	35	54, 70, 76, 78, 88, 92, 94.
6	3 —	18	60, 90, 100.
7	1 —	7	84.
Summa	47	146	

Im Ganzen umfaßt also die Tabelle 1116 eigentliche und 146 uneigentliche Formen, zusammen 1262, so daß für die Determinanten von -1 bis -100 die Anzahl der primitiven Classen ternärer positiver Formen 1262 beträgt.

Nach vollendetem Druck vorliegender Arbeit beabsichtige ich, die Einteilung in *Genera*, über welche ich schon im 35. Bande des *Crelleschen Journals* ziemlich ausführlich gesprochen habe, auf die in der Tabelle enthaltenen Formen anzuwenden; diese neue Anordnung wird sehr erleichtert, wenn man Gelegenheit findet, die Formen einzeln auszuschneiden, wozu wegen der ebenfalls bedruckten Rückseite jedes Blattes mindestens zwei Exemplare erforderlich sind. — Die Anzahl der in jedem einzelnen Genus enthaltenen Formen läßt sich ebenfalls theoretisch angeben, z. B. wenn $D = p$ Primzahl ist, so existiren zwei Genera ($\mathfrak{R}p$ und $\mathfrak{N}p$, siehe a. a. O.), und für beide wird der Ausdruck für die Anzahl der in ihnen enthaltenen Classen von der Form

$$\gamma h(p) + \gamma' h(2p) + \gamma'' p + \gamma''',$$

wo $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$ numerische Constanten sind, die nur vom Reste von p (mod. 24) abhängen.

§. 6.

Berechnung der Transformations-Anzahlen δ .

Der Bestimmung der Transformations-Anzahlen (siehe §. 4.), durch welche die Tabelle einen ganz neuen Zuwachs gewonnen hat, liegen folgende beiden Tafeln zu Grunde, aus welchen man leicht die das Problem der Transformation für positive ternäre Formen vollständig erschöpfenden Lehrsätze ableiten könnte, die aber gerade in der hier vorliegenden Weise am besten zum practischen Gebrauche geeignet scheinen.

I. Tafel für die Formen $\left(\begin{smallmatrix} a, & a', & a'' \\ +b, & +b', & +b'' \end{smallmatrix}\right)$ mit positiven unteren Coëfficienten.

No.	Bedingungen.	t
A (1)	keine Bedingung	1
(2)	$a = 2b' = 2b''$	1
(3)	$a = 2b', b'' = 2b$	1
(4)	$a = 2b'', b' = 2b$	1
(5)	$a' = 2b, b'' = 2b'$	1
B (6)	$a = a', b = b'$	1
(7)	$a' = a'', b' = b''$	1
(8)	$a = 2b' = 2b'', a' = a''$	1
(9)	$a = 2b' = 2b'' = 4b, a' = a''$	2
(10)	$a = a' = 2b = 2b' = 2b''$	3
C (11)	$a = a' = a'', b = b' = b''$	3
(12)	$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''$	13

II. Tafel für die Formen $\left(\begin{smallmatrix} a, & a', & a'' \\ -b, & -b', & -b'' \end{smallmatrix}\right)$ mit nicht positiven unteren Coëfficienten.

No.	Bedingungen	t
A (1)	keine Bedingung	1
(2)	$a = 2b', b'' = 0$	1
(3)	$a = 2b'', b' = 0$	1
(4)	$a' = 2b, b'' = 0$	1
(σ) (5)	$a = 2b' + b'', a' = 2b + b''$	1
B (6)	$a = a', b = b'$	1
(7)	$a' = a'', b' = b''$	1
(σ) (8)	$a = a' = b + b' + b''$	1
(σ) (9)	$a = a' = 2b = 2b', b'' = 0$	2
(10)	$a = a' = 2b'', b = b' = 0$	3
(11)	$a' = a'' = 2b, b' = b'' = 0$	3
(σ) (12)	$a' = a'', a = 2b' + b'', a' = 2b + b''$	1
(σ) (13)	$a' = a'', b' = b'', σ, a = 3b'$	2
C (14)	$a = a' = a'', b = b' = b''$	3
(σ) (15)	$a = a' = a'', σ$	2
(σ) (16)	$a = a' = a'', σ, b = b'$	2
(σ) (17)	$a = a' = a'', σ, b' = b''$	3
(σ) (18)	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''$	6

Folgendes ist der Gebrauch dieser beiden Tafeln. Neben jeder Nummer mit Ausnahme von No. (1) befindet sich ein Complex oder eine Gruppe von Bedingungen für die Coëfficienten der reducirten Formen; mit diesen vergleicht man jede zu untersuchende Form und zwar entweder in der Tafel I. oder II., je nachdem ihre drei unteren Coëfficienten, d. h. die der doppelten Producte $2yz$, $2xz$, $2xy$, positiv sind oder nicht; für alle Gruppen von Bedingungen, welche bei der vorgelegten Form wirklich erfüllt sind, addirt man die zugehörigen Werthe von t ; die so gefundene Summe $\sum t$ giebt entweder selbst den Werth von δ , wenn nicht mehr als einer (also entweder keiner oder nur einer) der unteren Coëfficienten der Form den Werth Null hat, oder diese Summe ist doppelt zu nehmen oder endlich mit 4 zu multipliciren, je nachdem zwei der unteren Coëfficienten oder alle drei $= 0$ sind. Die No. (1) (keine Bedingung) in beiden Tafeln dient nur dazu, um anzuzeigen, dafs selbst dann Transformationen Statt finden, wenn keine der unter den folgenden Nummern verzeichneten Bedingungen erfüllt ist, man kann also sagen, dafs *diese* Nummer *wenigstens* immer erfüllt ist, sie ist demnach bei allen Formen ohne Weiteres immer mitzuzählen. Bei diesem Verfahren sind zum richtigen Verständnifs folgende beiden Bemerkungen wohl zu beachten. 1) darf *keine* Rücksicht darauf genommen werden, ob ein Complex von Bedingungen unter einem andern umfassenderen schon logisch enthalten ist, sondern die zu untersuchende Form mufs mit jeder einzelnen Nummer der Tafeln verglichen werden, abgesehen davon, dafs vielleicht unter den Bedingungen einer späteren Nummer die einer früheren bereits vollständig oder zum Theil begriffen sind; so enthält z. B. der Complex von Bedingungen neben No. (8) in Tafel I. die sämtlichen Bedingungen der beiden früheren Nummern (2) und (7), denn wenn $a = 2b' = 2b''$ und $a' = a''$ ist, so kann man dies so aussprechen, dafs erstlich $a' = a''$ und $b' = b''$ wie bei (7), dafs zweitens $a = 2b' = 2b''$ wie bei (2), dessen ungeachtet mufs für jede Form, welche der (8) genügt, auch unter (2) und (7) noch aufserdem nachgesehen werden, weil die Werthe von t , wie aus den zu Grunde liegenden theoretischen Betrachtungen hervorgeht, sich nur auf diejenigen Transformationen beziehen, welche der Totalität der in der Nummer befindlichen Bedingungen, ohne Rücksicht auf deren Zerlegung in einzelne Partialgruppen, ihre Entstehung verdanken; von No. (1) kann man sagen, dafs sie unter allen folgenden Nummern enthalten ist, und doch ist der ihr zugehörige Werth $t = 1$ bei keiner Form zu vergessen, mag dieselbe übrigens keiner oder noch so vielen der folgenden Bedingungen Genüge leisten. 2) ist zu bemerken: um von einer Form behaupten zu

können, daß irgend eine Nummer für sie Statt findet, reicht es nicht hin, daß dieselbe einer oder mehreren der unter dieser Nummer verzeichneten Bedingungen genügt, sondern die letzteren müssen sämmtlich und zu gleicher Zeit erfüllt sein; so kann es geschehen, daß eine Menge der in den Tafeln vorkommenden Bedingungen bei einer reducirten Form angetroffen werden, und doch nicht in der Weise vereinigt erscheinen, daß irgend eine der auf (1) folgenden Nummern der Form zugeschrieben werden könnte; z. B. können alle drei oberen Coëfficienten einander gleich sein, wie bei der Form $\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, und doch ist nur $\delta = 1$; namentlich ist bei den Formen der ersten Art (Tafel I.) häufig einzeln $a = 2b'$ oder $a = 2b''$ oder $a' = 2b$, tritt aber außer einer von diesen keine andere Eigenschaft der Form hinzu, so ist immer nur $\delta = 1$; bei No. (1) hätte daher statt „keine Bedingung“ passender und vollständiger „kein Complex von zusammengehörigen Bedingungen“ geschrieben werden können, doch genügt jene kürzere Andeutung, da es mir hier nur auf ein möglichst practisches Verfahren zur Bestimmung von δ ankommt.

Die Eintheilung jeder einzelnen Tafel in *A*, *B*, *C* bezieht sich auf das Verhalten der drei oberen Coëfficienten a , a' , a'' und dient um die Übersicht zu erleichtern, indem z. B. jede Form, für welche a , a' , a'' alle drei verschieden sind, nur mit den Bedingungen unter *A* zu vergleichen ist, während die unter *B* und *C* ganz unberücksichtigt bleiben; sind zwei jener oberen Coëfficienten einander gleich und von dem dritten verschieden, so braucht man nur die Nummern unter *A* und *B* nachzusehen und vernachlässigt die unter *C* befindlichen. Einen ähnlichen Zweck hat das Zeichen σ in der zweiten Tafel, welches die nicht sehr häufig vorkommende Bedingung $a + a' = 2(b + b' + b'')$ bei den Formen zweiter Art andeuten soll, und ist dieser Fall, wo er vorkommt, in den Tafeln ausdrücklich vorn in der ersten Verticalcolumnne angezeigt, damit man diese Nummern sofort übergehen kann, wenn die zu untersuchende Form, nachdem man sie hierauf zuvor geprüft hat, der in Rede stehenden Bedingung (σ) *nicht* Genüge leistet. Hiernach wird man in den meisten Fällen bei einiger Übung ganze Reihen der in den Tafeln befindlichen Nummern auf einmal verwerfen und unter den wenigen übrig bleibenden Nummern mit Leichtigkeit die brauchbaren herausfinden können.

Einige Beispiele werden diese Regeln deutlicher machen. Für die Form $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist keine der vorkommenden Bedingungen erfüllt, also hat man nur aus No. (1) in Tafel II. $t = 1$, da aber zwei der unteren Coëfficienten Null sind, so wird $\delta = 2$; für die Form $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist zwar $a' = 2b$, nämlich $4 = 2 \cdot 2$, da aber

nicht $b'' = 2b'$, so ist No. (5) in I., die einzige, welche zu vergleichen man veranlaßt wird, nicht erfüllt, und man hat daher nur aus (1) $t = 1$ und $\delta = 1$. Die Form $\begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ 1, 2, 2 \end{pmatrix}$ ist in der Tafel I. nur mit den unter A befindlichen Nummern, und zwar aufser (1), was sich von selbst versteht, mit (2), (3) und (4) zu vergleichen, denn (5) fällt aus, weil nicht $a' = 2b$, d. h. 5 nicht das Doppelte von 1 ist; jene drei Bedingungen oder Gruppen von Bedingungen sind wirklich erfüllt, also sind im Ganzen (1), (2), (3) und (4) erfüllt, daher $\Sigma t = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, $\delta = 4$. Für die Form $\begin{pmatrix} 2, 5, 8 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}$, welche unter die Kategorie der Tafel II. fällt, ist weder (σ) erfüllt, da $1 + 1 <$ als die Hälfte von $2 + 5$, noch findet Gleichheit der oberen Coëfficienten Statt, man wird also aufser (1) nur (2), (3) und (4) prüfen, und da nur (1) und (2) erfüllt sind, so ist $\Sigma t = 1 + 1$, $\delta = 2$. Für die Form $\begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ sind in I. (1), (2), (6) und (10) erfüllt, folglich $\Sigma t = 1 + 1 + 1 + 3$, $\delta = 6$. Für die Form $\begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ 1, 1, 2 \end{pmatrix}$ ist zwar $a' = a''$ und auch $a = 2b''$, ferner $b = b'$, diese drei Eigenschaften der vorliegenden Form stehen aber nicht in solcher Beziehung, dafs irgend eine der auf (1) folgenden Nummern in I. anzuwenden wäre, es ist also nur $\delta = 1$. Noch füge ich kurz folgende Formen als Beispiele hinzu nebst den auf sie anzuwendenden Nummern der beiden Tafeln:

- $\begin{pmatrix} 1, 2, 2 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ II. (1), (4), (7), (11), $\Sigma t = 6$, $\delta = 2$ $\Sigma t = 12$;
- $(\sigma) \begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}$ II. (1), (2), (4), (5), (6), (8), (9), $\delta = \Sigma t = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 8$;
- $\begin{pmatrix} 1, 1, 2 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ II. (1), (6), $\delta = 4$ $\Sigma t = 4 \cdot 2 = 8$;
- $\begin{pmatrix} 1, 1, 1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ II. (1), (6), (7), (14), $\Sigma t = 1 + 1 + 1 + 3 = 6$,
 $\delta = 4$ $\Sigma t = 24$;
- $\begin{pmatrix} 3, 3, 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ I. (1), (6), (7), (11), $\Sigma t = 1 + 1 + 1 + 3 = 6$,
 $\delta = \Sigma t = 6$;
- $(\sigma) \begin{pmatrix} 3, 3, 4 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}$ II. (1), (5), (6), (8), $\Sigma t = 4$, $\delta = 4$;
- $\begin{pmatrix} 2, 2, 2 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ I. (1), (2), (6), (7), (8), (10), (11), (12), $\delta = \Sigma t = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 13 = 24$;
- $(\sigma) \begin{pmatrix} 3, 3, 3 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}$ II. (1), (5), (6), (7), (8), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), $\delta = \Sigma t = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 6 = 24$.

Wäre es in der That nothwendig *jede* der 1262 in der gröfseren Tabelle enthaltenen reducirten Formen in dieser Weise mit den Bedingungen der obigen Tafeln zu vergleichen, so würde dies ein zu langwieriges, überdies einer sicheren Controle entbehrendes Geschäft sein. Glücklicherweise sind jene Bedingungen der Art, dafs jede einmal untersuchte Form als Muster oder Vorbild für unendlich viele andere dienen kann, denen man sogleich ansieht, dafs sie denselben Bedingungen wie jene genügen, also auch in Bezug auf ihre Transformations-Anzahl δ mit jener übereinstimmen müssen. Nachdem man z. B. für die Form $\begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ die Zahl $\delta = 6$ gefunden hat, so geht ohne weitere Benutzung der Tafeln hervor, dafs auch für die Formen $\begin{pmatrix} 2, 2, 4 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2, 2, 5 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ und allgemein für alle Formen $\begin{pmatrix} 2, 2, a'' \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$, in denen $a'' > 2$ (aber nicht $= 2$) ist, $\delta = 6$ sein wird; oder nachdem man gefunden hat, dafs für $\begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta = 12$ ist, so folgt, dafs für jede Form wie $\begin{pmatrix} 2, 2, a'' \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$, in welcher $a'' > 2$ ist, ebenfalls $\delta = 12$ sein mufs. Da die Determinanten solcher Formen eine arithmetische Progression bilden, so sind die Formen selbst in der gröfseren Tabelle leicht aufzufinden und mit den ihnen zugehörigen Transformations-Anzahlen zu versehen. Es wurde also der Gebrauch obiger Tafeln nur so weit ausgedehnt, als es durchaus erforderlich war, und bis man zu Formen gelangte, welche sich in der angegebenen Weise auf frühere zurückbeziehen liefsen; spätere Werthe von δ wurden theils rückwärts gehend aus früheren bestimmt, theils wurde die ganze Tabelle der Formen vom Anfange ausgehend dem Ende zu mit ganzen Reihen von solchen aus einander hervorgehenden gleichen Werthen von δ gleichsam durchzogen. Bei diesem Verfahren erreichte man aufser der bedeutenden Vereinfachung der Arbeit noch einen doppelten Vortheil: einmal fand man neue Gelegenheit, die in §. 3. vorkommenden arithmetischen Reihen wiederum zu durchlaufen und sich von dem Vorhandensein jeder Form in der gröfseren Tabelle zu überzeugen; sodann ergab sich eine nicht besser zu wünschende Controlirung der einzelnen δ , indem jeder bei der Bestimmung derselben etwa begangene Fehler an mehreren Stellen sich wiederholen mufste, also eine Übereinstimmung von $\mathfrak{M} = \sum \frac{1}{\delta}$ (§. 4.) mit der Theorie an allen diesen Stellen zugleich durch blofse Compensation mindestens sehr unwahrscheinlich, wenn nicht unmöglich war.

Ferner bemerke man noch die Transformations-Anzahl für einige häufig vorkommenden speciellen Arten von Formen, wie sie sich aus den obigen

Tafeln ergibt. Für die Formen $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ wird, wie schon *Gauß*s angegeben hat, $\delta = 4$, $\delta = 8$ oder $\delta = 24$, je nachdem resp. alle drei oberen Coëfficienten ungleich, oder zwei derselben einander gleich und vom dritten verschieden, oder endlich alle drei gleich sind; in der That ist für diese Formen immer $\delta = 4 \sum t$ zu setzen und im ersten Falle ist in Tafel I. nur No. (1) erfüllt, im zweiten sind entweder die Nummern (1) und (6) oder die Nummern (1) und (7) erfüllt, im dritten gleichzeitig die Nummern (1), (6), (7) und (14). Die Formen $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ -b, 0, 0 \end{pmatrix}$, in denen b von 0 verschieden ist, geben $\delta = 4$, so oft in der binären Form (a', b, a'') entweder $a' = a''$ oder b genau die Hälfte von a' ist; sie geben $\delta = 12$, wenn die letzteren beiden Bedingungen vereinigt erscheinen, wie z. B. bei der Form $\begin{pmatrix} 1, 2, 2 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ mit der Determinante -3 , in allen übrigen Fällen $\delta = 2$; $a = a'$ ist bei diesen Formen unzulässig und widerspricht den Bedingungen der Reducirtheit. Ähnliches gilt von den Formen $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ 0, -b', 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ 0, 0, -b'' \end{pmatrix}$, wenn man die binären Formen (a, b', a'') resp. (a, b'', a') betrachtet; sollte für die Formen $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ 0, 0, -b'' \end{pmatrix}$ vielleicht $a' = a''$ sein, so hat dieser Umstand durchaus keinen Einfluss auf die Transformations-Anzahl. Durch diese Regeln allein werden die so zahlreichen Formen erledigt, in denen $a = 1$ ist, da nur die beiden Arten $\begin{pmatrix} 1, a', a'' \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1, a', a'' \\ -b, 0, 0 \end{pmatrix}$ vorkommen; noch bequemer übersieht man für diese das Resultat, wenn man bemerkt, dafs für $\begin{pmatrix} 1, 1, a'' \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$, wenn $a'' > 1$ ist, $\delta = 8$ wird, dafs $\begin{pmatrix} 1, a', a'' \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$, wo a' und a'' beide > 1 sind, $\delta = 8$ oder $\delta = 4$ ergibt, je nachdem $a' = a''$ oder von a'' verschieden ist, und dafs endlich für die Formen $\begin{pmatrix} 1, a', a'' \\ -b, 0, 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, a', a'' \\ -\frac{1}{2}a', 0, 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, a', a'' \\ -\frac{1}{2}a', 0, 0 \end{pmatrix}$ resp. $\delta = 2$, $\delta = 4$, $\delta = 4$, $\delta = 12$ wird, wenn man in jeder dieser vier Formen die nicht ausdrücklich durch die Bezeichnung selbst angedeuteten Bedingungen als nicht erfüllt voraussetzt. Die ebenfalls in der Tabelle sehr häufig vorkommenden Formen mit dem ersten Coëfficienten $a = 2$ können sämtlich nach den folgenden Vorbildern beurtheilt werden:

$$\begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix};$$

$\delta=6 \qquad \delta=8 \qquad \delta=12 \qquad \delta=4 \qquad \delta=8$

$$\begin{pmatrix} 2, 3, 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 3 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 3 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 3 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix};$$

$\delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=4$

$$\begin{matrix} (2, 3, 4) \\ \delta=2 \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 3, 4) \\ \delta=2 \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 3, 4) \\ \delta=2 \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 3, 4) \\ \delta=4 \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 3, 4) \\ \delta=4 \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 3, 4) \\ \delta=2 \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 3, 4) \\ \delta=4 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} (2, 4, 5) \\ \delta=2 \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 4, 5) \\ \delta=4 \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 4, 5) \\ \delta=4 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} (2, 4, 4) \\ \delta=4 \end{matrix}, \text{ mit Ausnahme der ganz einzeln stehenden, am Anfange vorkommenden}$$

$$\begin{matrix} (2, 2, 2) \\ \delta=24 \end{matrix} \text{ und } \begin{matrix} (2, 2, 2) \\ \delta=12 \end{matrix}. \text{ — Eine weitere Vermehrung dieser Fälle bietet zwar}$$

keine theoretischen Schwierigkeiten dar, verliert aber ihren practischen Werth durch die damit verbundene Überladung des Gedächtnisses; aus dem letzteren Grunde scheint auch eine Behandlung der Formen nach Vorbildern, welche sich auf unmittelbare Anschauung stützt, einer solchen nach beschreibenden Regeln in practischer Hinsicht bei Weitem vorzuziehen.

In theoretischer Beziehung namentlich in Hinsicht auf die Bestimmung der Formen-Anzahl war mir die Eintheilung der reducirten Formen in solche, für welche $\delta = 1$, und in die übrigen, für welche $\delta > 1$, also $\delta = 2, 4, 6, 8, 12$ oder 24 ist, von Wichtigkeit; die letzteren, welche man Ausnahmeformen nennen kann, haben die sehr bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit, die den ersteren mit $\delta = 1$ nicht zukommt, daß sie sich stets in eine, zwar nicht nothwendig reducirte, aber doch äquivalente Form von einer der beiden folgenden Arten

$$ax^2 + \varphi \quad \text{oder} \quad a(x^2 + xy) + \varphi$$

transformiren lassen, wo φ eine *binäre* Form bedeutet, die allein die Variablen y und z und nicht mehr x enthält. Diese Formen entsprechen denen, welche *Gaußs* *incipites* genannt hat, und a ist, wie leicht zu sehen, bei ihnen immer ein Divisor der doppelten Determinante.

Möge mir erlaubt sein, zum Beschlufs hier eine Bemerkung hinzuzufügen, welche sich auf *unbestimmte* ternäre Formen bezieht. Für diese Formen scheint die Anzahl der zu einer Determinante gehörigen Classen einem noch einfacheren Gesetze, als bei den bestimmten (positiven, negativen Formen) zu unterliegen, wenigstens, wenn die Determinante als eine ungerade Zahl ohne quadratischen Theiler angenommen wird. Ist letztere eine ungerade Primzahl, so scheinen immer genau zwei Classen vorhanden zu sein, und besteht die Determinante aus einem Product von μ verschiedenen ungeraden Primzahlen, so scheint die Anzahl der Classen 2^μ zu betragen.

Zweite Abtheilung.

Tabelle der reducirten positiven ternären Formen nebst ihren Transformations-Anzahlen für alle Determinanten von —1 bis —100 und für die einzelne Determinante —385.

I. Tabelle der eigentlich primitiven positiven ternären Formen für alle negativen Determinanten von —1 bis —100.

<i>D</i>	Anzahl	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
1	1	$\begin{pmatrix} 1, 1, 1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta = 24$
2	1	$\begin{pmatrix} 1, 1, 2 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta = 8$
3	2	$\begin{pmatrix} 1, 1, 3 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 2 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta = 8 \quad \delta = 12$
4	2	$\begin{pmatrix} 1, 1, 4 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 2 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta = 8 \quad \delta = 8$
5	2	$\begin{pmatrix} 1, 1, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta = 8 \quad \delta = 4$
6	2	$\begin{pmatrix} 1, 1, 6 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta = 8 \quad \delta = 4$
7	3	$\begin{pmatrix} 1, 1, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 4 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta = 8 \quad \delta = 4 \quad \delta = 6$
8	4	$\begin{pmatrix} 1, 1, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 4 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 3 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta = 8 \quad \delta = 4 \quad \delta = 4 \quad \delta = 8$
9	4	$\begin{pmatrix} 1, 1, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 5 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 3 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta = 8 \quad \delta = 4 \quad \delta = 8 \quad \delta = 12$
10	3	$\begin{pmatrix} 1, 1, 10 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta = 8 \quad \delta = 4 \quad \delta = 4$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
11	3	$\begin{pmatrix} 1, 1, 11 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 6 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 4 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
12	6	$\begin{pmatrix} 1, 1, 12 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 6 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 4 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 4 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=12 \quad \delta=8 \quad \delta=4$
13	4	$\begin{pmatrix} 1, 1, 13 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 5 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 3 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=6 \quad \delta=2$
14	3	$\begin{pmatrix} 1, 1, 14 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 5 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
15	6	$\begin{pmatrix} 1, 1, 15 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 8 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 4 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 5 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 3 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=12 \quad \delta=4$
16	7	$\begin{pmatrix} 1, 1, 16 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 4 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 5 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 5 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 3 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 3, 3, 3 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \quad \delta=4$ $\delta=24$
17	4	$\begin{pmatrix} 1, 1, 17 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 9 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 6 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 4 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
18	6	$\begin{pmatrix} 1, 1, 18 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 6 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 5 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 3 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 4 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \quad \delta=2$
19	5	$\begin{pmatrix} 1, 1, 19 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 10 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 5 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 7 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 4 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=6 \quad \delta=2$
20	8	$\begin{pmatrix} 1, 1, 20 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 10 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 6 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 2, 3, 4 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=8$ $\delta=4 \quad \delta=6$
21	7	$\begin{pmatrix} 1, 1, 21 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 11 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 5 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 7 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 4 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 3, 3, 3 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=12 \quad \delta=4$ $\delta=2$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
22	4	$\begin{pmatrix} 1, 1, 22 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 11 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 4 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 5 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
23	5	$\begin{pmatrix} 1, 1, 23 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 12 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 8 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 6 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 5 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
24	10	$\begin{pmatrix} 1, 1, 24 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 12 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 6 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 7 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 5 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, 2, 7 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 4 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 3 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 4 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$
25	6	$\begin{pmatrix} 1, 1, 25 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 13 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 9 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 5 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 5 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \quad \delta=6 \quad \delta=2 \quad \delta=4$
26	5	$\begin{pmatrix} 1, 1, 26 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 13 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 9 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 6 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 7 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4$
27	9	$\begin{pmatrix} 1, 1, 27 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 14 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 6 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 9 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=12 \quad \delta=12$ $\begin{pmatrix} 2, 3, 5 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 6 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
28	9	$\begin{pmatrix} 1, 1, 28 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 14 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 8 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 5 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, 3, 6 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 4 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
29	5	$\begin{pmatrix} 1, 1, 29 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 15 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 10 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 6 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 4 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1$
30	7	$\begin{pmatrix} 1, 1, 30 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 15 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 10 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 6 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 6 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 4 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
31	7	$\begin{pmatrix} 1, 1, 31 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 16 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 8 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 7 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 11 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 6 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=6 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
32	12	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 32 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 16 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 11 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 9 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 6 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \\ & \begin{pmatrix} 2, 2, 9 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 7 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 4 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 5 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 4 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \end{aligned}$
33	9	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 33 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 17 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 11 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 7 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 11 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 6 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=12 \quad \delta=4 \\ & \begin{pmatrix} 2, 3, 7 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 4 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \end{aligned}$
34	6	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 34 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 17 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 9 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 6 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \end{aligned}$
35	9	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 35 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 18 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 12 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 9 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 6 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \\ & \begin{pmatrix} 2, 3, 7 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 4 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \end{aligned}$
36	14	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 36 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 18 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 12 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 10 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 8 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \\ & \begin{pmatrix} 1, 6, 6 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 6 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 5 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 4 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \\ & \begin{pmatrix} 3, 3, 5 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 4 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=2 \quad \delta=12 \end{aligned}$
37	7	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 37 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 19 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 13 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 7 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 8 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 5 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=6 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \\ & \begin{pmatrix} 3, 3, 5 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=1 \end{aligned}$
38	6	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 38 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 19 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 13 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 7 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 8 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \end{aligned}$
39	10	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 39 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 20 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 13 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 10 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 8 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 8 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \end{aligned}$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
39	s. o.	$\begin{pmatrix} 2, 2, 13 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 7 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 5 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 4 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=12 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
40	14	$\begin{pmatrix} 1, 1, 40 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 20 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 10 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 11 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 7 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, 2, 11 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 8 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 5 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 5 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 3, 3, 6 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 4 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=2$
41	7	$\begin{pmatrix} 1, 1, 41 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 21 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 14 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 9 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 7 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 3, 4, 4 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=1$
42	9	$\begin{pmatrix} 1, 1, 42 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 21 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 14 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 11 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, 3, 9 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 5 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 5 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
43	8	$\begin{pmatrix} 1, 1, 43 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 22 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 11 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 15 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 8 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 9 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=6 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, 5, 5 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 5 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=1$
44	13	$\begin{pmatrix} 1, 1, 44 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 22 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 15 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 11 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 12 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 9 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 1, 6, 8 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 11 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 7 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 6 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 4 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 5 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=2 \quad \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 4, 4, 5 \\ 2, 2, 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=6$
45	15	$\begin{pmatrix} 1, 1, 45 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 23 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 15 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 9 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 7 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .					
45	s. o.	$\begin{pmatrix} 2, 2, 15 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=12$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 8 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 9 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 4, 7 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 5 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 6 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 3, 3, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 3, 3, 6 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 4 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$			
46	6	$\begin{pmatrix} 1, 1, 46 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 23 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 5, 10 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 8 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 6 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	
		$\begin{pmatrix} 3, 4, 5 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$					
47	9	$\begin{pmatrix} 1, 1, 47 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 24 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 3, 16 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 12 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 6, 8 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 7, 8 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 2, 3, 10 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 4, 7 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 6 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$			
48	20	$\begin{pmatrix} 1, 1, 48 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 24 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 3, 16 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 12 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 13 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 6, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$
		$\begin{pmatrix} 1, 7, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 8, 8 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=12$	$\begin{pmatrix} 2, 2, 13 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 10 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 4, 7 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$
		$\begin{pmatrix} 2, 5, 5 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 3, 3, 6 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 3, 3, 6 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 3, 3, 7 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 4 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 5 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$
		$\begin{pmatrix} 4, 4, 5 \\ -2, -2, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 4, 4, 5 \\ 1, 2, 2 \end{pmatrix}$ $\delta=4$				
49	9	$\begin{pmatrix} 1, 1, 49 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 25 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 5, 10 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 7, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 2, 2, 17 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=6$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 9 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 2, 4, 7 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 6 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 3, 5, 5 \\ -2, -1, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=6$			
50	10	$\begin{pmatrix} 1, 1, 50 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 25 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 3, 17 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 5, 10 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 6, 9 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 2, 13 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$
		$\begin{pmatrix} 2, 3, 10 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 4, 7 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 5 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$		

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
51	11	$\begin{pmatrix} 1, 1, 51 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 26 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 17 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 13 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 11 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 10 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, 2, 17 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 9 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 6 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 5 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 4, 5 \\ 2, 2, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=12 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=2$
52	13	$\begin{pmatrix} 1, 1, 52 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 26 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 13 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 14 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 8 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 13 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=8$ $\begin{pmatrix} 2, 3, 9 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 11 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 7 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 6 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 6 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 7 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix},$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 3, 4, 5 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=1$
53	8	$\begin{pmatrix} 1, 1, 53 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 27 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 18 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 9 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 11 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 6 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 3, 3, 7 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 5 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=1 \quad \delta=1$
54	11	$\begin{pmatrix} 1, 1, 54 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 27 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 18 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 11 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 9 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, 3, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 6 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 7 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 6 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=1$
55	13	$\begin{pmatrix} 1, 1, 55 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 28 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 14 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 11 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 8 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 8, 8 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, 2, 19 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 10 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 11 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 9 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 6 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 7 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix},$ $\delta=6 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 3, 4, 5 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2$
56	16	$\begin{pmatrix} 1, 1, 56 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 28 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 19 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 14 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 15 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 12 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 1, 6, 10 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 8, 9 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 15 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 7 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix},$ $\delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
56	s. o.	$\begin{pmatrix} 3, & 3, & 8 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 5 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 6 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 5 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
57	12	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 57 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 29 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3, & 19 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 6, & 11 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 19 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 10 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=12 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 12 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 5, & 7 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 3, & 7 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 5 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 6 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 5, & 5 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=2$
58	8	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 58 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 29 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 15 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 10 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 12 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 5, & 6 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, & 5, & 7 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 5, & 5 \\ -2, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=1$
59	10	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 59 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 30 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3, & 20 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 4, & 15 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 5, & 12 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 6, & 10 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 1, & 7, & 9 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 9 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 7 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 5 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1$
60	22	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 60 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 30 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3, & 20 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 4, & 15 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 4, & 16 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 5, & 12 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 1, & 6, & 10 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 8, & 8 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 15 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 10 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 12 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 9 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, & 5, & 6 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 7 \\ -3, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 3, & 7 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 3, & 8 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 6 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 3, & 5, & 5 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 5 \\ -1, & -2, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 5 \\ 0, & 0, & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 5, & 5 \\ 2, & 2, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=12 \quad \delta=4$
61	10	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 61 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 31 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 5, & 13 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 7, & 10 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 21 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 11 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=6 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, & 4, & 9 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 5, & 7 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 3, & 8 \\ 0, & -1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 6 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=1$
62	8	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 62 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 31 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3, & 21 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 6, & 11 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 7, & 9 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 13 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
62	s. o.	$\begin{pmatrix} 2, 5, 7 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 6 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \qquad \delta=1$
63	19	$\begin{pmatrix} 1, 1, 63 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 32 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 21 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 16 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 12 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \qquad \delta=4 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 1, 8, 8 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 8, 9 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 21 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 11 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 13 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 9 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=12 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, 5, 7 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 7 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 8 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 6 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 5 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=8 \qquad \delta=1 \qquad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 3, 5, 6 \\ -2, -1, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2$
64	17	$\begin{pmatrix} 1, 1, 64 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 32 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 16 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 17 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 13 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 8, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \qquad \delta=4 \qquad \delta=4 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=8$ $\begin{pmatrix} 1, 8, 10 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 17 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 11 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 9 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 8 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 8 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \qquad \delta=8 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 3, 3, 9 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 5 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 4, 5 \\ 0, -2, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ -2, 0, -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ 1, 2, 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=8$
65	12	$\begin{pmatrix} 1, 1, 65 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 33 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 22 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 13 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 11 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 9, 9 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, 3, 13 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 7 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 6 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 7 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 5 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \qquad \delta=4 \qquad \delta=1 \qquad \delta=1 \qquad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 4, 4, 5 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2$
66	12	$\begin{pmatrix} 1, 1, 66 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 33 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 22 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 14 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 11 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 10 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \qquad \delta=4 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, 2, 17 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 11 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 9 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 6, 7 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 8 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 6 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=2$
67	11	$\begin{pmatrix} 1, 1, 67 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 34 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 17 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 23 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 12 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 14 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=6 \qquad \delta=2 \qquad \delta=2$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .					
67	s. o.	$\begin{pmatrix} 2, & 5, 8 \\ -2, & -1, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 8 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 6, 7 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3, 5, & 5 \\ -1, 0, & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ 2, 1, 2 \end{pmatrix}$	
		$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=1$	$\delta=1$	
68	17	$\begin{pmatrix} 1, 1, 68 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 34 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 3, 23 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 17 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 18 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 6, 12 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$
		$\delta=8$	$\delta=4$	$\delta=2$	$\delta=4$	$\delta=4$	$\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 1, 7, 11 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 8, 9 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 2, 17 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 14 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 4, 9 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$
		$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=8$	$\delta=2$	$\delta=4$	$\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 3, 3, 9 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 6 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 7 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 7 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4, 4, 7 \\ 2, 2, 2 \end{pmatrix}$	
		$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=1$	$\delta=6$	
69	14	$\begin{pmatrix} 1, 1, 69 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 35 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 3, 23 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 5, 14 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 6, 13 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 7, 10 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$
		$\delta=8$	$\delta=4$	$\delta=4$	$\delta=2$	$\delta=4$	$\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 2, 2, 23 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 12 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 4, 11 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 6, 7 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3, 3, 8 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3, 3, 9 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}$
		$\delta=12$	$\delta=4$	$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=1$
		$\begin{pmatrix} 3, 4, 6 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4, 4, 5 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$				
		$\delta=2$	$\delta=2$				
70	12	$\begin{pmatrix} 1, 1, 70 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 35 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 5, 14 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 7, 10 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 12 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 14 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$
		$\delta=8$	$\delta=4$	$\delta=4$	$\delta=4$	$\delta=2$	$\delta=4$
		$\begin{pmatrix} 2, 4, 9 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 8 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 6, 7 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3, 5, 5 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ -2, -1, -1 \end{pmatrix}$
		$\delta=2$	$\delta=4$	$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=2$
71	11	$\begin{pmatrix} 1, 1, 71 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 36 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 3, 24 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 18 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 5, 15 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 6, 12 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$
		$\delta=8$	$\delta=4$	$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 1, 8, 9 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 8, 10 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 6, 7 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3, 5, 6 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4, 4, 5 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}$	
		$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=2$	$\delta=1$	$\delta=1$	
72	28	$\begin{pmatrix} 1, 1, 72 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 36 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 3, 24 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 18 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 19 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 6, 12 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$
		$\delta=8$	$\delta=4$	$\delta=4$	$\delta=4$	$\delta=4$	$\delta=4$
		$\begin{pmatrix} 1, 8, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 8, 11 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1, 9, 9 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 2, 19 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 12 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 15 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$
		$\delta=4$	$\delta=4$	$\delta=4$	$\delta=8$	$\delta=4$	$\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 2, 4, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 8 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 8 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 9 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 7, 7 \\ 3, 1, 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3, 3, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$
		$\delta=4$	$\delta=2$	$\delta=4$	$\delta=2$	$\delta=4$	$\delta=8$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
72	s. o.	$\begin{aligned} & \left(\begin{smallmatrix} 3, 3, 9 \\ 0, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 3, 10 \\ -1, -1, -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 4, 6 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 4, 7 \\ -2, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 4, 7 \\ 1, 1, 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 5, 5 \\ -1, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \\ & \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=1 \quad \delta=4 \\ & \left(\begin{smallmatrix} 3, 5, 6 \\ -2, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 4, 4, 5 \\ -1, -1, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 4, 4, 7 \\ 1, 2, 2 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 5, 5, 5 \\ -1, -2, -2 \end{smallmatrix} \right). \\ & \quad \delta=1 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \end{aligned}$
73	12	$\begin{aligned} & \left(\begin{smallmatrix} 1, 1, 73 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 37 \\ -1, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 7, 11 \\ -2, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 2, 25 \\ 1, 1, 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 3, 13 \\ -1, -1, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 3, 15 \\ -1, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \\ & \quad \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=6 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \\ & \left(\begin{smallmatrix} 2, 4, 11 \\ 1, 1, 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 5, 8 \\ -1, -1, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 5, 9 \\ -2, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 7, 7 \\ -3, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 4, 7 \\ 0, -1, -1 \end{smallmatrix} \right), \\ & \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \\ & \left(\begin{smallmatrix} 3, 5, 6 \\ -2, -1, 0 \end{smallmatrix} \right). \\ & \quad \delta=1 \end{aligned}$
74	9	$\begin{aligned} & \left(\begin{smallmatrix} 1, 1, 74 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 37 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 3, 25 \\ -1, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 5, 15 \\ -1, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 6, 13 \\ -2, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 9, 10 \\ -4, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \\ & \quad \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \\ & \left(\begin{smallmatrix} 2, 2, 19 \\ 0, -1, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 4, 7 \\ -1, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 5, 6 \\ -1, -1, -1 \end{smallmatrix} \right). \\ & \quad \delta=4 \quad \delta=1 \quad \delta=1 \end{aligned}$
75	19	$\begin{aligned} & \left(\begin{smallmatrix} 1, 1, 75 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 38 \\ -1, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 3, 25 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 4, 19 \\ -1, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 5, 15 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 6, 14 \\ -3, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \\ & \quad \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \\ & \left(\begin{smallmatrix} 1, 7, 12 \\ -3, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 10, 10 \\ -5, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 2, 25 \\ 0, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 3, 13 \\ 0, -1, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 3, 15 \\ 0, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \\ & \quad \delta=2 \quad \delta=12 \quad \delta=12 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \\ & \left(\begin{smallmatrix} 2, 4, 11 \\ -1, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 5, 8 \\ 0, -1, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 6, 7 \\ -1, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 3, 9 \\ -1, -1, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 5, 5 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 6, 6 \\ 3, 1, 1 \end{smallmatrix} \right), \\ & \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=8 \quad \delta=2 \\ & \left(\begin{smallmatrix} 4, 4, 5 \\ 0, 0, -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 4, 5, 5 \\ 1, 1, 2 \end{smallmatrix} \right). \\ & \quad \delta=4 \quad \delta=1 \end{aligned}$
76	18	$\begin{aligned} & \left(\begin{smallmatrix} 1, 1, 76 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 38 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 4, 19 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 4, 20 \\ -2, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 5, 16 \\ -2, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1, 7, 11 \\ -1, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \\ & \quad \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \\ & \left(\begin{smallmatrix} 1, 8, 10 \\ -2, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 2, 19 \\ 0, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 3, 13 \\ -1, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 4, 11 \\ -2, -1, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 5, 9 \\ 1, 1, 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2, 6, 7 \\ -2, 0, 0 \end{smallmatrix} \right), \\ & \quad \delta=2 \quad \delta=8 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \\ & \left(\begin{smallmatrix} 2, 6, 7 \\ -1, -1, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 3, 10 \\ 1, 1, 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 3, 4, 8 \\ 2, 1, 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 4, 4, 5 \\ 0, -1, 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 4, 5, 5 \\ -1, 0, -2 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 4, 5, 6 \\ 2, 2, 2 \end{smallmatrix} \right). \\ & \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \end{aligned}$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
77	14	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 77 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 39 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 26 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 13 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 11 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 9, 9 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \\ & \begin{pmatrix} 2, 3, 16 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 11 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 9 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 6, 7 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 10 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=1 \\ & \begin{pmatrix} 3, 4, 7 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 7 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 7 \\ -2, -1, -1 \end{pmatrix}. \\ & \delta=1 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \end{aligned}$
78	12	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 78 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 39 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 26 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 13 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 13 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 16 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \\ & \begin{pmatrix} 2, 5, 8 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 6, 7 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 9 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 6 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 6 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}. \\ & \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=2 \end{aligned}$
79	12	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 79 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 40 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 20 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 16 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 8, 10 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \\ & \begin{pmatrix} 1, 8, 11 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 27 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 14 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 9 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 8 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=2 \quad \delta=6 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \\ & \begin{pmatrix} 3, 5, 6 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}. \\ & \delta=1 \quad \delta=1 \end{aligned}$
80	28	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 80 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 40 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 27 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 20 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 21 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 16 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \\ & \begin{pmatrix} 1, 6, 14 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 12 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 8, 10 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 8, 12 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 9, 9 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 21 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \\ & \begin{pmatrix} 2, 3, 16 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 11 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 7, 7 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 7, 7 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 10 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \\ & \begin{pmatrix} 3, 3, 11 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 7 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 8 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 6, 6 \\ -2, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 4, 5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=8 \\ & \begin{pmatrix} 4, 4, 7 \\ -2, -2, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 4, 7 \\ 1, 1, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ 0, 0, -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ -2, 0, -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ 1, 2, 2 \end{pmatrix}. \\ & \delta=8 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \end{aligned}$
81	16	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 81 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 41 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 27 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 17 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 15 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 9, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \end{aligned}$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
81	s. o.	$\begin{pmatrix} 1, 9, 10 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 27 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 14 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 9 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 10 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 6, 9 \\ 3, 1, 1 \end{pmatrix},$ $\delta=2 \quad \delta=12 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 3, 4, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 6 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 4, 7 \\ 2, 2, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, 5, 5 \\ 2, 2, 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=2 \quad \delta=6$
82	11	$\begin{pmatrix} 1, 1, 82 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 41 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 13 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 21 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 14 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 17 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, 4, 11 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 9 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 10 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 6, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 6 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1$
83	13	$\begin{pmatrix} 1, 1, 83 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 42 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 28 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 21 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 14 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 1, 7, 12 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 9, 11 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 17 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 13 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 9 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, 7, 7 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 8 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ 2, 1, 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=1$
84	26	$\begin{pmatrix} 1, 1, 84 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 42 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 28 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 21 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 22 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 17 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 1, 6, 14 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 12 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 8, 11 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 10, 10 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 21 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 14 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, 4, 11 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 6, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 6, 9 \\ -3, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 7, 7 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 10 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 11 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 3, 4, 7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 8 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 8 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 6 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 4, 7 \\ 0, 0, -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=1 \quad \delta=2 \quad \delta=12 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ -2, -2, 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=2$
85	15	$\begin{pmatrix} 1, 1, 85 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 43 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 17 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 10, 11 \\ -5, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 29 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 15 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=6 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, 3, 17 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 9 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 10 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 7, 8 \\ 3, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 11 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 8 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=1$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
85	s. o.	$\begin{pmatrix} 3, & 5, & 6 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 5, & 7 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 5, & 5 \\ 0, & -2, & -2 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=2$
86	10	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 86 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 43 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3, & 29 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 5, & 18 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 6, & 15 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 9, & 10 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, & 4, & 11 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 7, & 8 \\ -3, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 5, & 7 \\ -2, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 5, & 6 \\ 2, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=1$
87	17	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 87 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 44 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3, & 29 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 4, & 22 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 6, & 16 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 7, & 13 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 1, & 8, & 11 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 8, & 12 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 29 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 15 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 18 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 13 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix},$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=12 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, & 5, & 10 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 7, & 8 \\ -3, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 3, & 10 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 9 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 5, & 6 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=2$
88	20	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 88 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 44 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 4, & 22 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 4, & 23 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 8, & 11 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 8, & 13 \\ -4, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 23 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 15 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 18 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 11 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 5, & 9 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 2, & 5, & 10 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 3, & 11 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 3, & 12 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 8 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 5, & 7 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=1$ $\begin{pmatrix} 3, & 5, & 7 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 6, & 6 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 5, & 5 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 5, & 5 \\ 1, & 2, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=1 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
89	13	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 89 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 45 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3, & 30 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 5, & 18 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 6, & 15 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 7, & 14 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 1, & 9, & 10 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 13 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 9 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 7, & 7 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 8 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1$ $\begin{pmatrix} 4, & 4, & 7 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 5, & 6 \\ -2, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=1 \quad \delta=1$
90	21	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 90 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 45 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3, & 30 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 5, & 18 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 6, & 15 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 7, & 13 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
90	s. o.	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 9, 10 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 9, 11 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 23 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 15 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 18 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 9 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \\ & \begin{pmatrix} 2, 5, 10 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 11 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 6, 9 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 7, 7 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 10 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 9 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=8 \quad \delta=1 \\ & \begin{pmatrix} 3, 5, 6 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 6, 6 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}. \\ & \delta=4 \quad \delta=1 \quad \delta=2 \end{aligned}$
91	17	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 91 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 46 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 23 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 19 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 13 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 10, 10 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \\ & \begin{pmatrix} 2, 2, 31 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 16 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 13 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 11 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 6, 9 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 7, 7 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=6 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \\ & \begin{pmatrix} 3, 5, 8 \\ -2, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 6, 6 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ 1, 1, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, 5, 5 \\ -1, -1, -2 \end{pmatrix}. \\ & \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=1 \quad \delta=2 \end{aligned}$
92	21	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 92 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 46 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 31 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 23 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 4, 24 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 16 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \\ & \begin{pmatrix} 1, 8, 12 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 9, 12 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 23 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 19 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 13 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 10 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=8 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \\ & \begin{pmatrix} 3, 3, 12 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 8 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 4, 9 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 7 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 6, 7 \\ 3, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 4, 7 \\ -1, -2, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=1 \quad \delta=2 \\ & \begin{pmatrix} 4, 4, 9 \\ 2, 2, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ -1, 0, -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, 5, 7 \\ 2, 2, 2 \end{pmatrix}. \\ & \delta=6 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \end{aligned}$
93	17	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 93 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 47 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 3, 31 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 6, 17 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 31 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 16 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=12 \quad \delta=4 \\ & \begin{pmatrix} 2, 3, 19 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 5, 10 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 6, 9 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 7, 8 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 11 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 3, 12 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}, \\ & \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \\ & \begin{pmatrix} 3, 4, 8 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 7 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 5, 7 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, 6, 7 \\ -3, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, 5, 6 \\ -1, -2, -2 \end{pmatrix}. \\ & \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \end{aligned}$
94	11	$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, 1, 94 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 47 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 5, 19 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 7, 14 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 10, 11 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 3, 16 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}, \\ & \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \end{aligned}$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .					
94	s. o.	$\begin{pmatrix} 2, 5, 11 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 6, 9 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 7, 8 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 9 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$	$\begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ 1, 2, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$	
95	17	$\begin{pmatrix} 1, 1, 95 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 48 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 3, 32 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 24 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 5, 19 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 6, 16 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 1, 8, 12 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 8, 13 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 9, 11 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 10, 12 \\ -5, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 19 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 10 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$
		$\begin{pmatrix} 3, 4, 9 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$	$\begin{pmatrix} 3, 5, 7 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$	$\begin{pmatrix} 3, 6, 6 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 4, 4, 7 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	
96	33	$\begin{pmatrix} 1, 1, 96 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 48 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 3, 32 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 24 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 4, 25 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 5, 20 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 1, 6, 16 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 7, 15 \\ -3, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 8, 12 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 8, 14 \\ -4, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 10, 10 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 11, 11 \\ -5, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$
		$\begin{pmatrix} 2, 2, 25 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 16 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 4, 13 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 7, 7 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 2, 7, 8 \\ -2, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 3, 3, 11 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 3, 3, 12 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 3, 3, 13 \\ -1, -1, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 8 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 9 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 3, 4, 9 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$	$\begin{pmatrix} 3, 6, 6 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$
		$\begin{pmatrix} 3, 6, 6 \\ 0, -1, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 4, 4, 7 \\ 0, -2, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 4, 4, 9 \\ 1, 2, 2 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 4, 5, 5 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ -1, -2, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ 0, 0, -2 \end{pmatrix}$ $\delta=4$
		$\begin{pmatrix} 4, 5, 7 \\ -2, 0, -2 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 4, 5, 7 \\ 1, 2, 2 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 5, 5, 6 \\ -2, -2, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$			
97	15	$\begin{pmatrix} 1, 1, 97 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 49 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 7, 14 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 2, 33 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=6$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 17 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 20 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$
		$\begin{pmatrix} 2, 4, 15 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 11 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 5, 11 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 6, 9 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 2, 7, 8 \\ -2, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	
		$\begin{pmatrix} 2, 7, 8 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 3, 5, 7 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=1$	$\begin{pmatrix} 3, 6, 7 \\ -2, -1, -1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$	$\begin{pmatrix} 4, 5, 6 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$		
98	15	$\begin{pmatrix} 1, 1, 98 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 49 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 3, 33 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 6, 17 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$	$\begin{pmatrix} 1, 7, 14 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$	$\begin{pmatrix} 1, 9, 11 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
98	s. o.	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 25 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 20 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 13 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 5, & 10 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 7, & 7 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=8$ $\begin{pmatrix} 2, & 7, & 9 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 10 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 5, & 7 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 5, & 6 \\ -2, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=2 \quad \delta=1$
99	24	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 99 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 50 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3, & 33 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 4, & 25 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 5, & 20 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 1, & 6, & 18 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 9, & 11 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 9, & 12 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 10, & 10 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 33 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=12$ $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 17 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 5, & 11 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 5, & 12 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 9 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 7, & 9 \\ -3, & 0, & -1 \end{pmatrix},$ $\delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 3, & 3, & 11 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 9 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 5, & 8 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 6, & 6 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 6, & 7 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 7 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=2 \quad \delta=1 \quad \delta=1 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 4, & 5, & 6 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 5, & 7 \\ 2, & 1, & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 5, & 5 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=1 \quad \delta=1 \quad \delta=2$
100	22	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 100 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 50 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 4, & 25 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 4, & 26 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 5, & 20 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 8, & 13 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 1, & 10, & 10 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 25 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 17 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 20 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 13 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 5, & 10 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=8 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$ $\begin{pmatrix} 2, & 5, & 12 \\ -2, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 9 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 9 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 3, & 13 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 5, & 7 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix},$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 3, & 5, & 8 \\ -2, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 7, & 7 \\ -3, & -1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 5, & 5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 5, & 6 \\ 0, & -2, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 5, & 5 \\ 0, & -1, & -2 \end{pmatrix}.$ $\delta=1 \quad \delta=6 \quad \delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=1$

II. Tabelle der *uneigentlich* primitiven positiven ternären Formen für alle negativen Determinanten von -2 bis -100 *).

D	Anzahl	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
4	1	$\begin{pmatrix} 2, 2, 2 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$. $\delta = 24$
6	1	$\begin{pmatrix} 2, 2, 2 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$. $\delta = 12$
10	1	$\begin{pmatrix} 2, 2, 4 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$. $\delta = 6$
12	2	$\begin{pmatrix} 2, 2, 4 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 4 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$. $\delta = 8 \quad \delta = 12$
14	1	$\begin{pmatrix} 2, 2, 4 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}$. $\delta = 4$
16	1	$\begin{pmatrix} 2, 2, 6 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$. $\delta = 6$
18	1	$\begin{pmatrix} 2, 2, 6 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$. $\delta = 12$
20	2	$\begin{pmatrix} 2, 2, 6 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 4 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}$. $\delta = 8 \quad \delta = 4$
22	2	$\begin{pmatrix} 2, 2, 6 \\ 0, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 8 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$. $\delta = 4 \quad \delta = 6$
24	2	$\begin{pmatrix} 2, 2, 8 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 4 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$. $\delta = 12 \quad \delta = 4$
26	1	$\begin{pmatrix} 2, 4, 4 \\ -1, 0, -1 \end{pmatrix}$. $\delta = 2$
28	3	$\begin{pmatrix} 2, 2, 8 \\ -1, -1, 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 2, 10 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, 4, 4 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$. $\delta = 8 \quad \delta = 6 \quad \delta = 4$

*) Für diejenigen Determinanten unter 100, welche in dieser zweiten Tabelle *nicht* vorkommen, finden keine *uneigentlich* primitiven Formen Statt. Es sind dies alle ungeraden Zahlen und alle ungeraden Potenzen von 2.

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
30	3	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 8 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 10 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 4 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=12 \quad \delta=4$
34	2	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 12 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 6 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=6 \quad \delta=2$
36	4	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 10 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 12 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 6 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 4 \\ 1, & 2, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=12 \quad \delta=4 \quad \delta=8$
38	2	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 10 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 6 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=2$
40	2	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 14 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 6 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=6 \quad \delta=2$
42	3	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 14 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 6 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 6 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=12 \quad \delta=2 \quad \delta=4$
44	3	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 12 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 6 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 4 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
46	3	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 12 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 16 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 6 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=6 \quad \delta=2$
48	3	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 16 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 8 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 6 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=12 \quad \delta=2 \quad \delta=4$
50	1	$\begin{pmatrix} 4, & 4, & 4 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=6$
52	4	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 14 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 18 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 8 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 8 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=6 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
54	5	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 14 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 18 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 8 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 6 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 4 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=12 \quad \delta=2 \quad \delta=12 \quad \delta=6$
56	3	$\begin{pmatrix} 2, & 4, & 8 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 6 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 4 \\ 0, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
58	3	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 20 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 8 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 6 \\ -2, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=6 \quad \delta=2 \quad \delta=2$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
60	6	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 16 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 20 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 8 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 6 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 4 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ 1, & 2, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=12 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=4$
62	3	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 16 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 8 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 10 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
64	2	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 22 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 6 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=6 \quad \delta=2$
66	4	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 22 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 10 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 6 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ 2, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=12 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
68	4	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 18 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 10 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 10 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
70	5	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 18 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 24 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 10 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 6 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=6 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
72	2	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 24 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ -3, & -1, & 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=12 \quad \delta=4$
74	2	$\begin{pmatrix} 2, & 4, & 10 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=1$
76	5	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 20 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 26 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 10 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 12 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ -1, & -2, & 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \quad \delta=6 \quad \delta=4 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
78	5	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 20 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 26 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 10 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=12 \quad \delta=2 \quad \delta=4 \quad \delta=2$
80	3	$\begin{pmatrix} 2, & 4, & 12 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ -2, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
82	4	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 28 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 12 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=6 \quad \delta=2 \quad \delta=2 \quad \delta=2$
84	7	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 22 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 28 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 12 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 12 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix},$ $\delta=8 \quad \delta=12 \quad \delta=4 \quad \delta=4 \quad \delta=2$ $\begin{pmatrix} 4, & 4, & 8 \\ 1, & 2, & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 6, & 6 \\ 3, & 2, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \quad \delta=4$

<i>D</i>	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — <i>D</i> .
86	3	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 22 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ 0, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=1$
88	5	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 30 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 8, & 8 \\ 4, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=6 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2$
90	6	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 30 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 12 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 14 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 6, & 6 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix},$ $\delta=12 \qquad \delta=2 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2$
92	5	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 24 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 12 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 10 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 6 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 8 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=2 \qquad \delta=2$
94	5	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 24 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 32 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 12 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 14 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 8 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$ $\delta=4 \qquad \delta=6 \qquad \delta=2 \qquad \delta=2 \qquad \delta=2$
96	4	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 32 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 14 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 10 \\ -3, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 4, & 8 \\ 2, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$ $\delta=12 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2$
98	1	$\begin{pmatrix} 2, & 4, & 14 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$ $\delta=4$
100	6	$\begin{pmatrix} 2, & 2, & 26 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 2, & 34 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 14 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 10 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 8, & 8 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 6, & 6 \\ 1, & 2, & 2 \end{pmatrix}.$ $\delta=8 \qquad \delta=6 \qquad \delta=4 \qquad \delta=2 \qquad \delta=4 \qquad \delta=8$

Reducirte Formen für die Determinante $-385 = -5 \cdot 7 \cdot 11$.

Formen-Anzahl = 59.

15 Formen mit der Determinante -385 , deren Transformationszahl $\delta = 1$ ist.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3, & 6, & 23 \\ 0, & -1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 7, & 20 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 8, & 18 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 10, & 15 \\ 4, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 6, & 17 \\ 0, & -1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 8, & 15 \\ 4, & 2, & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 5, & 6, & 15 \\ -1, & 0, & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 7, & 12 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 7, & 14 \\ 3, & 2, & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 8, & 10 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 8, & 11 \\ 2, & 2, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 9, & 11 \\ -3, & -1, & -2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 6, & 8, & 11 \\ 3, & 1, & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7, & 7, & 11 \\ 2, & 3, & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7, & 8, & 9 \\ -3, & -1, & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

25 Formen, für welche $\delta = 2$.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2, & 3, & 65 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 5, & 43 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 9, & 22 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 10, & 21 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 8, & 27 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 7, & 31 \\ -3, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 2, & 13, & 16 \\ -3, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 11, & 20 \\ 4, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 12, & 19 \\ 5, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 15, & 15 \\ -5, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 14, & 17 \\ 6, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4, & 35 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 3, & 5, & 26 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 5, & 29 \\ -2, & -1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 11, & 12 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 13, & 13 \\ 6, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 7, & 14 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 9, & 11 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 5, & 5, & 17 \\ -2, & -2, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 5, & 19 \\ -1, & -1, & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 6, & 13 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 10, & 11 \\ -5, & -2, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7, & 7, & 8 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 7, & 7, & 9 \\ -2, & -2, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7, & 8, & 8 \\ 1, & 2, & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

17 Formen, für welche $\delta = 4$.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, & 5, & 77 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 7, & 55 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 11, & 35 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 193 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 10, & 41 \\ -5, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 14, & 31 \\ -7, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1, & 22, & 23 \\ -11, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 3, & 77 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 4, & 55 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 5, & 39 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 6, & 35 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & 7, & 28 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 2, & 11, & 18 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 7, & 11 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 9, & 9 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6, & 6, & 11 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7, & 8, & 8 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Je eine für welche $\delta = 6$ resp. $\delta = 8$.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2, & 2, & 129 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1, & 1, & 385 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}. \\ & \delta=6 \qquad \delta=8 \end{aligned}$$

A n h a n g.

Dieser Anhang enthält als Beilagen zu der vorhergehenden Arbeit zuerst einige Tafeln, welche sich auf die Theorie der Transformation der positiven ternären Formen beziehen und theils als eine Ergänzung zu §. 6. anzusehen sind; sodann einen Versuch zu einer Tabelle der unbestimmten oder indifferenten ternären quadratischen Formen.

A. Tafeln über die Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Transformations - Anzahlen.

1) Eigentlich primitive Formen.

D	$\delta =$						
	1	2	4	6	8	12	24
1							1
2					1		
3					1	1	
4					2		
5			1		1		
6			1		1		
7			1	1	1		
8			2		2		
9			1		2	1	
10			2		1		
11	1	1			1		
12		3			2	1	
13	1	1	1		1		
14	1	1			1		
15		4			1	1	
16		3			3		1
17	2	1			1		
18	1	3			2		
19	2	1	1		1		
20	1	4	1		2		
21	1	4			1	1	
22	2	1			1		
23	3	1			1		
24		8			2		
25	1	2	1		2		

D	$\delta =$						
	1	2	4	6	8	12	24
26		2	2		1		
27		3	3		1	2	
28		3	4		2		
29	1	2	1		1		
30		1	5		1		
31		4	1	1	1		
32		3	7		2		
33		3	4		1	1	
34		3	2		1		
35		3	5		1		
36		2	7		4	1	
37	1	3	1	1	1		
38		4	1		1		
39		4	4		1	1	
40		2	10		2		
41	1	4	1		1		
42		2	6		1		
43	1	4	1	1	1		
44		6	4	1	2		
45	1	2	9		2	1	
46	1	3	1		1		
47		7	1		1		
48		2	13		4	1	
49		3	2	2	2		
50	1	3	4		2		

D	$\delta =$						
	1	2	4	6	8	12	24
51	1	4	4		1	1	
52	1	6	4		2		
53	2	4	1		1		
54	1	4	5		1		
55		6	5	1	1		
56		6	8		2		
57	1	5	4		1	1	
58	1	4	2		1		
59	1	7	1		1		
60		4	15		2	1	
61	2	5	1	1	1		
62	1	5	1		1		
63	1	6	9		2	1	
64		5	8		4		
65	2	4	5		1		
66		5	6		1		
67	2	6	1	1	1		
68	1	9	4	1	2		
69	1	7	4		1	1	
70		6	5		1		
71	2	7	1		1		
72	2	4	18		4		
73	2	7	1	1	1		
74	2	4	2		1		
75	1	6	8		2	2	

D	$\delta =$						
	1	2	4	6	8	12	24
76	1	11	4		2		
77	2	6	5		1		
78	1	5	5		1		
79	3	6	1	1	1		
80		8	16		4		
81	1	6	5	1	2	1	
82	1	7	2		1		
83	2	9	1		1		
84	1	7	15		2	1	
85	3	5	5	1	1		
86	2	6	1		1		
87	1	10	4		1	1	
88	2	8	8		2		

D	$\delta =$						
	1	2	4	6	8	12	24
89	3	8	1		1		
90	2	4	13		2		
91	2	8	5	1	1		
92	2	12	4	1	2		
93	2	9	4		1	1	
94	2	7	1		1		
95	2	9	5		1		
96	1	7	23		2		
97	3	9	1	1	1		
98	2	8	3		2		
99	4	8	9		2	1	
100	2	7	8	1	4		
385	15	25	17	1	1		

2) Uneigentlich primitive Formen.

D	$\delta =$						
	1	2	4	6	8	12	24
4							1
6						1	
10				1			
12					1	1	
14			1				
16				1			
18						1	
20			1		1		
22			1	1			
24			1			1	
26	1						
28		1	1	1			
30			2			1	
34	1			1			
36		1			2	1	
38	1	1					
40		1		1			
42		1	1			1	
44		1	1		1		
46		1	1	1			
48		1	1			1	
50				1			
52	1	1	1	1			
54	1	1	1			2	

D	$\delta =$						
	1	2	4	6	8	12	24
56		1	2				
58		2		1			
60			4		1	1	
62		2	1				
64		1		1			
66		2	1			1	
68		2	1		1		
70		1	3	1			
72			1			1	
74	1	1					
76		2	1	1	1		
78		2	2			1	
80		3					
82		3		1			
84		1	4		1	1	
86	1	1	1				
88		2	2	1			
90		3	2			1	
92		3	1		1		
94		3	1	1			
96		2	1			1	
98			1				
100		1	2	1	2		

Die Zahlen der vorstehenden kleinen Tafeln, welche durch ziemlich mühsames Abzählen der einzelnen δ aus der grossen Tabelle erhalten worden sind, zeigen an, *wie vielen* Formen mit der am Rande befindlichen Determinante die oben über der Spalte stehende Anzahl von Transformationen zukommt. Addirt man in diesen Tafeln die von der zweiten Spalte an in einer Zeile neben einander stehenden Zahlen, so giebt die Summe die Formenzahl für die in der ersten Spalte befindliche Determinante; multiplicirt man die in der 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 7ten, 8ten Spalte stehenden Zahlen resp. mit 24, 12, 6, 4, 3, 2, 1, und dividirt die Summe der Producte durch 24, so erhält man das Maafs oder die Dichtigkeit für dieselbe Determinante.

Unter den allgemeinen Sätzen, welche man aus diesen Tafeln ziehen kann, bemerke ich beispielsweise nur den einen, dafs die Transformations-Anzahl $\delta = 12$ nur dann vorkommt, wenn die Determinante durch 3 theilbar ist, und zwar bei den eigentlich primitiven Formen *so oft*, als es Arten giebt D auf die Form $D = 3mn^2$ zu bringen, während m ungerade und zu n relative Primzahl ist, bei den uneigentlich primitiven Formen *so oft*, als es Arten giebt D auf die Form $D = 6mn^2$ zu bringen, während n ungerade und zu m relative Primzahl ist.

B. Tafeln zur Aufstellung der Substitutionen, durch welche eine reducirte positive ternäre quadratische Form in sich selbst transformirt wird.

Durch die in §. 6. aufgestellten Tafeln ist man in Stand gesetzt, für jede reducirte Form den zugehörigen Werth von δ , d. h. die *Anzahl* der Substitutionen zu finden, durch welche die Form in sich selbst transformirt werden kann. Dies war genügend für die Controlirung der Tabelle der reducirten Formen durch die Bestimmung des Maafses oder der Dichtigkeit $\Sigma \frac{1}{\delta}$. Da es jedoch in anderer Hinsicht von Wichtigkeit sein kann, *die Substitutionen selbst*, und nicht blofs ihre Anzahl kennen zu lernen, so füge ich hier die vollständigeren Tafeln hinzu, welche diesem Zwecke entsprechen. Der Gebrauch der Tafeln I b. und II b., welche aus I a. resp. II a. entsprungen sind, ist bis auf die Bezeichnung der hier auftretenden Substitutions-*Systeme*, von denen sogleich die Rede sein wird, ganz analog dem der Tafeln I. und II. in §. 6.; man mufs wieder jeden Complex von Bedingungen, welchen die Form

Genüge leistet, einzeln in den Tafeln aufsuchen und findet dann nach und nach alle der Form zugehörigen Substitutionen. Bei tabellarischer Anordnung der Formen gelten natürlich ähnliche Vortheile wie in §. 6. Um beiläufig auch der Transformation der *nicht*-reducirten Formen zu erwähnen, so kann man jede solche Form in eine reducirte transformiren, und wenn man die hierdurch gewonnene Substitution mit allen Substitutionen der reducirten Form in sich selbst und sodann mit der jener ersten reciproken Substitution zusammensetzt, so findet man alle Transformationen der vorgelegten Form in sich selbst *).

*) *Seeber* war in seinem Werke über die ternären Formen der Lösung der Aufgabe, alle Substitutionen einer reducirten Form in sich selbst zu finden, außerordentlich nahe. Nachdem er nämlich zum Beweise des Satzes, daß je zwei äquivalente reducirte Formen identisch sein müssen, zwei Tabellen von Substitutionen aufgestellt hat, welche man ohne gewissen zunächst liegenden Bedingungen zu widersprechen zwischen den beiden reducirten Formen annehmen kann, begnügt er sich zu zeigen, daß die erhaltenen Substitutionen theils wegen der ferneren Bedingungen unmöglich, theils von solcher Beschaffenheit sind, daß die zweite reducirte Form mit der ersten identisch wird. Er hätte aber weiter schließen können, daß diejenigen seiner Substitutionen, welche sich nicht als unmöglich erweisen, gerade diejenigen sind, durch welche die erste Form zwar nicht in eine von ihr verschiedene, aber wohl in eine mit ihr identische, also in sich selbst übergeht. Aus diesem Gesichtspuncte betrachtet hätten die *Seeberschen* Tafeln auf Seite 111 ff. und S. 159 ff. jenes Werkes sehr wohl als Grundlage bei der Lösung des hier in Rede stehenden Problems benutzt werden können, wenn nicht bei der großen Complication, mit welcher der Gegenstand behandelt wird, sehr gegründete Zweifel an der Vollzähligkeit der dort aufgeführten Fälle entstanden wären. Bei dem Zwecke, welchen sich *Seeber* vorgesetzt hatte, und welcher in dem Beweise eines Satzes negativer Art bestand, war allerdings die Auslassung einiger Fälle von keiner großen Erheblichkeit, während hier, wo es sich um positive und zuverlässige Resultate handelt, eine absolute Genauigkeit erfordert wird. Es schien daher rathsam, lieber die ganze Arbeit noch einmal und in einer mehr übersichtlichen Weise von vorn anzufangen, als die *Seeberschen* Tafeln zu benutzen; und in der That wurden zwei Fälle auf Seite 160 vermist, die keinesweges unmöglich sind, nämlich nach der dortigen Bezeichnung die Fälle $(1, f, \beta)$ und $(1, f, \gamma)$. Daß übrigens der genannte Verfasser auf den hier ausgesprochenen höchst einfachen Gedanken zur Lösung des Problems der Transformation nicht verfallen ist, geht daraus hervor, daß er an einer spätern Stelle seines Werkes (No. 33) dasselbe Problem unabhängig von den reducirten Formen und in einer Weise behandelt, welche freilich nicht tiefer in das Wesen der Sache eindringt, indem z. B. aus seinen Betrachtungen, welche eher eine Auseinandersetzung als eine Lösung des Problems genannt werden können, nicht einmal hervorgeht, daß die Zahl der Transformationen immer ein Divisor von 24 sein muß. Diese Bemerkung soll jedoch keinesweges einen Tadel des *Seeberschen* Werkes enthalten, dieselbe soll nur darauf hinweisen, daß in dem *Seeberschen* Beweise des Satzes über die Identität zweier äquivalenten reducirten Formen, welcher durch seine Länge wahrscheinlich die meisten Mathematiker abgeschreckt hat, dem Verfasser *unbewußt* die Elemente zu noch anderen sehr nützlichen Untersuchungen enthalten sind.

I. Tafeln für die Formen $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ +b, & +b', & +b'' \end{pmatrix}$ mit *positiven* unteren Coëfficienten.

Da bei der Transformation dieser Formen in sich selbst nur solche Substitutions-Systeme $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix}$ vorkommen, deren drei Verticalreihen $\begin{cases} \alpha \\ \alpha' \\ \alpha'' \end{cases}$ sowohl, als $\begin{cases} \beta \\ \beta' \\ \beta'' \end{cases}$, als $\begin{cases} \gamma \\ \gamma' \\ \gamma'' \end{cases}$ sämmtlich mit einer oder der andern der 12 folgenden Verticalreihen übereinstimmen:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$\begin{cases} 1 \\ 0, \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 1, \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0, \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \\ -1, \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \\ 0, \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 1, \\ -1 \end{cases}$
($\bar{1}$)	($\bar{2}$)	($\bar{3}$)	($\bar{4}$)	($\bar{5}$)	($\bar{6}$)
$\begin{cases} -1 \\ 0, \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ -1, \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0, \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ 1, \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ 0, \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ -1, \\ 1 \end{cases}$

so soll der Raumersparnis und gröfseren Übersichtlichkeit wegen jede Substitution nur durch drei Ziffern angedeutet werden, welche sich auf die eben geschriebenen Verticalreihen von Substitutions-Coëfficienten beziehen; so soll

z. B. das Symbol (1, 2, 3) die Substitution $\begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$ bedeuten, das Symbol (2, $\bar{4}$, 6)

die Substitution $\begin{pmatrix} 0, -1, 0 \\ 1, 1, 1 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$, u. s. w. Die nachstehende Tafel enthält nun,

systematisch geordnet, alle Substitutionen, welche überhaupt bei den reducirten Formen dieser Art vorkommen können. Ihre Zahl ist 29 und sie vereinigen folgende Eigenschaften in sich: 1) *keine* reducirte Form dieser Art kann durch eine *andere* Substitution (mit der Determinante + 1) als eine von diesen 29 in sich selbst übergehen; 2) wenn auch bei keiner Form alle diese Substitutionen vereinigt angetroffen werden, so giebt es doch für jede der Substitutionen unendlich viele reducirte Formen, welche durch sie in sich selbst transformirt werden können; 3) jede einzelne dieser 29 Substitutionen findet bei *allen* solchen und *nur* bei solchen reducirten Formen Statt, deren Coëfficienten den der Substitution beigesetzten Relationen Genüge leisten.

I a. Tafel der möglichen Substitutionen nebst den Bedingungen zwischen den Coëfficienten, welche erforderlich und zugleich hinreichend sind, damit durch eine solche Substitution eine reducirte Form mit *positiven* unteren Coëfficienten in sich selbst übergeht.

Substitutionen.	Bedingungen.
(1, 2, 3)	keine Bedingung *).
(1, 2, 5)	$a = 2b', b'' = 2b.$
(1, 2, 6)	$a' = 2b, b'' = 2b'.$
(1, 3, 2)	$a' = a'', b' = b''.$
(1, 3, 4)	$a' = a'', a = 2b' = 2b'' = 4b.$
(1, 4, 3)	$a = 2b'', b' = 2b.$
(1, 4, 5)	$a = 2b' = 2b''.$
(1, 5, 2)	$a = a'', a = 2b' = 2b'' = 4b.$
(1, 5, 4)	$a' = a'', a = 2b' = 2b''.$
(2, 1, 3)	$a = a', b = b'.$
(2, 3, 1)	$a = a' = a'', b = b' = b''.$
(2, 4, 6)	$a = a' = 2b = 2b' = 2b''.$
(2, 6, 4)	$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''.$
(3, 1, 2)	$a = a' = a'', b = b' = b''.$
(3, 2, 1)	$a = a' = a'', b = b' = b''.$
(3, 5, 6)	$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''.$
(3, 6, 5)	$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''.$
(4, 1, 5)	$a = a' = 2b = 2b' = 2b''.$
(4, 2, 6)	$a = a' = 2b = 2b' = 2b''.$
(4, 5, 1)	$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''.$
(4, 6, 2)	
(5, 1, 4)	
(5, 3, 6)	
(5, 4, 1)	
(5, 6, 3)	
(6, 2, 4)	
(6, 3, 5)	
(6, 4, 2)	
(6, 5, 3)	

*) d. h. durch die Substitution (1, 2, 3) geht jede Form in sich selbst über.

Hieraus geht durch umgekehrte Anordnung, indem man jedesmal alle diejenigen Substitutionen zusammenfaßt, welchen derselbe Complex von Bedingungen entspricht, die folgende Tafel hervor:

I b. Tafel zur Aufstellung aller Transformationen, durch welche eine vorgelegte reducirte Form mit *positiven* unteren Coëfficienten in sich selbst übergeht.

Bedingungen.	Substitutionen.
Keine Bedingung:	$(1, 2, 3).$
$a = 2b' = 2b'':$	$(1, 4, 5).$
$a = 2b', b'' = 2b:$	$(\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}).$
$a = 2b'', b' = 2b:$	$(\bar{1}, \bar{4}, \bar{3}).$
$a' = 2b, b'' = 2b':$	$(\bar{1}, \bar{2}, \bar{6}).$
$a = a', b = b':$	$(\bar{2}, \bar{1}, \bar{3}).$
$a = a'', b' = b'':$	$(\bar{1}, \bar{3}, \bar{2}).$
$a' = a'', a = 2b' = 2b'':$	$(\bar{1}, \bar{5}, \bar{4}).$
$a' = a'', a = 2b' = 2b'' = 4b:$	$(1, 3, 4), (1, 5, 2).$
$a = a' = 2b = 2b' = 2b'':$	$(\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{1}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{2}, \bar{6}).$
$a = a' = a'', b = b' = b'':$	$(2, 3, 1), (3, 1, 2), (\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}).$
$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b'':$	$(2, 6, \bar{4}), (3, \bar{5}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{6}, 5),$
	$(4, 5, 1), (4, \bar{6}, \bar{2}), (5, 1, 4),$
	$(5, \bar{3}, 6), (\bar{5}, \bar{4}, \bar{1}), (\bar{5}, \bar{6}, 3),$
	$(\bar{6}, \bar{2}, 4), (\bar{6}, 3, \bar{5}), (6, \bar{4}, 2), (6, 5, \bar{3}).$

Die 29 in diesen Tafeln enthaltenen Substitutionen sind nicht ohne Mühe sämmtlich so ausgewählt, daß ihre Determinante $= +1$ wird, indem die Substitutionen mit der Determinante -1 , welche unnöthiger Weise die Zahl der Systeme verdoppeln würden, ausgeschlossen worden sind; letztere gehen übrigens aus den obigen 29 hervor, wenn man alle neun Coëfficienten der Substitutionssysteme in ihre entgegengesetzten Werthe umwandelt. Ein Beispiel der Anwendung der Tafel I b. scheint wegen der großen Einfachheit unnöthig zu sein, und verweise ich auf die Beispiele zu II b. für den nun folgenden zweiten Fall der reducirten Formen, so wie auf §. 6.

II. Tafeln für die Formen $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ -b, & -b', & -b'' \end{pmatrix}$ mit *nicht positiven* unteren Coëfficienten.

Da bei diesen Formen die Substitutions-Systeme nur solche Verticalreihen von Coëfficienten enthalten, welche mit einer der folgenden 14 übereinstimmen,

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0, \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1, \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0, \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1, \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0, \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1, \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1, \\ 1 \end{pmatrix}$
($\bar{1}$)	($\bar{2}$)	($\bar{3}$)	($\bar{4}$)	($\bar{5}$)	($\bar{6}$)	($\bar{7}$)
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0, \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1, \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0, \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1, \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0, \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1, \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1, \\ -1 \end{pmatrix}$

so sollen, ähnlich wie oben, die Substitutionen durch Symbole mit drei Ziffern aus der Reihe 1, 2, ... bis 7 und $\bar{1}, \bar{2}, \dots$ bis $\bar{7}$ vorgestellt werden, welche sich auf die jetzt geltenden, eben aufgestellten Combinationen von Substitutions-Coëfficienten beziehen, so dafs z. B. (1, 2, $\bar{7}$) das Substitutions-System $\begin{pmatrix} 1, 0, -1 \\ 0, 1, -1 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}$ bedeutet u. s. w.

II a. Tafel der möglichen Substitutionen nebst den Bedingungen zwischen den Coëfficienten, welche erforderlich und zugleich hinreichend sind, damit durch eine solche Substitution eine reducirte Form mit *nicht positiven* unteren Coëfficienten in sich selbst übergeht.

Substitutionen.	Bedingungen.
(1, 2, 3)	keine Bedingung.
(1, $\bar{2}$, $\bar{5}$)	$a = 2b', b'' = 0.$
($\bar{1}$, 2, $\bar{6}$)	$a' = 2b, b'' = 0.$
($\bar{1}$, $\bar{2}$, 7)	$a = 2b' + b'', a' = 2b + b''.$
($\bar{1}$, 3, $\bar{2}$)	$a' = a'', b' = b''.$
(1, 3, $\bar{6}$)	$a' = a'' = 2b, b' = b'' = 0.$

Substitutionen.	Bedingungen.
$(1, 3, \bar{7})$	$a' = a'', b' = b'', \sigma^*), a = 3b'.$
$(1, \bar{4}, \bar{3})$	$a = 2b'', b' = 0.$
$(1, 6, \bar{2})$	$a' = a'' = 2b, b' = b'' = 0.$
$(\bar{1}, \bar{6}, 3)$	$a' = a'' = 2b, b' = b'' = 0.$
$(1, \bar{7}, 2)$	$a' = a'', b' = b'', \sigma, a = 3b'.$
$(\bar{1}, \bar{7}, \bar{3})$	$a' = a'', b' = b'', \sigma, a = 3b'.$
$(\bar{2}, \bar{1}, \bar{3})$	$a = a', b = b'.$
$(2, \bar{1}, 5)$	$a = a' = 2b = 2b', b'' = 0.$
$(\bar{2}, 1, 6)$	$a = a' = 2b = 2b', b'' = 0.$
$(2, 1, \bar{7})$	$a = a', \sigma.$
$(2, 3, 1)$	$a = a' = a'', b = b' = b''.$
$(\bar{2}, \bar{3}, 7)$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''.$
$(2, \bar{4}, 3)$	$a = a' = 2b'', b = b' = 0.$
$(\bar{2}, 7, \bar{1})$	$a = a' = a'', \sigma, b' = b''.$
$(2, \bar{7}, 3)$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''.$
$(3, 1, 2)$	$a = a' = a'', b = b' = b''.$
$(\bar{3}, \bar{1}, 7)$	$a = a' = a'', \sigma, b' = b''.$
$(\bar{3}, \bar{2}, \bar{1})$	$a = a' = a'', b = b' = b''.$
$(3, 2, \bar{7})$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''.$
$(3, \bar{7}, 1)$	$a = a' = a'', \sigma.$
$(\bar{3}, 7, \bar{2})$	$a = a' = a'', \sigma, b = b'.$
$(4, \bar{1}, 3)$	$a = a' = 2b'', b = b' = 0.$
$(\bar{4}, 2, \bar{3})$	$a = a' = 2b'', b = b' = 0.$
$(7, \bar{1}, \bar{2})$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''.$
$(\bar{7}, 1, 3)$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''.$
$(\bar{7}, 2, 1)$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''.$
$(7, \bar{2}, \bar{3})$	$a = a' = a'', \sigma, b' = b''.$
$(7, \bar{3}, \bar{1})$	$a = a' = a'', \sigma, b = b'.$
$(\bar{7}, 3, 2)$	$a = a' = a'', \sigma.$

*) Der Buchstabe σ bedeutet der Kürze halber so wie in §. 6. die Bedingung $a + a' = 2(b + b' + b'')$.

Außer den hier aufgestellten 35 Substitutionen müssen aber, was in der Tabelle I. nicht der Fall ist, noch diejenigen zugelassen werden, welche aus ihnen entspringen, indem man den sämtlichen sechs in irgend zwei Verticalreihen des Substitutions-Systems befindlichen Coëfficienten entgegengesetztes Vorzeichen ertheilt; doch treten für diese neuen 105 Substitutionen noch folgende sehr einfache Bedingungen hinzu. Ist nämlich (p, q, r) eine der in der Tafel vorkommenden Substitutionen, so müssen für die Substitution $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$ außer den der Substitution (p, q, r) entsprechenden in der Tafel angegebenen Bedingungen noch die beiden $b = b' = 0$, für die Substitution $(\overline{p}, q, \overline{r})$ noch die Bedingungen $b = b'' = 0$, und für die Substitution $(p, \overline{q}, \overline{r})$ noch die Bedingungen $b' = b'' = 0$ hinzugefügt werden, wobei rücksichtlich der Bezeichnung zu bemerken ist, daß ein bereits über einer Ziffer befindliches Minuszeichen durch ein neu hinzugesetztes — wieder aufgehoben werden soll. So sind z. B., damit eine reducirte Form durch die Substitution $(\overline{3}, \overline{2}, \overline{1})$, welche in der Tafel vorkommt, in sich selbst übergehe, die Bedingungen $a = a' = a''$, $b = b' = b''$ erforderlich und hinreichend, und es ist nicht nöthig, daß irgend einer der drei unteren Coëfficienten b , b' oder b'' verschwinde; soll aber die Substitution $(3, 2, \overline{1})$ anwendbar sein, so genügt nicht die Gleichheit der oberen und die der unteren Coëfficienten, sondern es muß außerdem $b = b' = 0$ also freilich auch $b'' = 0$ sein; für die Substitution $(3, \overline{2}, 1)$ muß $b = b'' = 0$ also auch $b' = 0$, endlich für die Substitution $(\overline{3}, 2, 1)$ muß $b' = b'' = 0$ also auch $b = 0$ sein, so daß eine reducirte Form wie $\begin{pmatrix} a, a, a \\ b, b, b \end{pmatrix}$ in Betreff der vier Substitutionen $(\overline{3}, \overline{2}, \overline{1})$, $(3, 2, \overline{1})$, $(3, \overline{2}, 1)$, $(\overline{3}, 2, 1)$ entweder durch alle vier oder nur durch die erste derselben in sich selbst übergeht, je nachdem $b = 0$ oder von Null verschieden ist. Die Substitutionen der Tafel sind in Bezug auf ihre Vorzeichen nach einem solchen Princip ausgewählt worden, daß die angegebenen Regeln stets gültig bleiben. So durfte in dem eben ausgeführten Beispiele von den vier einander entsprechenden und nur durch die Vorzeichen verschiedenen Substitutionen mit der Determinante $+1$ nur die Substitution $(\overline{3}, \overline{2}, \overline{1})$ in die Tafel aufgenommen werden, weil sie die einzige ist, welche auf Formen wie $\begin{pmatrix} a, a, a \\ b, b, b \end{pmatrix}$ *unter allen Umständen* anwendbar bleibt. In gewissen Fällen war die Wahl zwischen zweien der vier zusammengehörigen Substitutionen gleichgültig, nämlich dann, wenn die hinzutreten-

den Bedingungen $b = b' = 0$ oder $b = b'' = 0$ oder $b' = b'' = 0$ schon von selbst unter den Bedingungen der Tafel enthalten sind, wie z. B. bei den Substitutionen $(1, 6, \bar{2})$, $(\bar{1}, \bar{6}, 3)$, $(2, \bar{4}, 3)$ u. s. w., welche durch resp. $(1, \bar{6}, 2)$, $(\bar{1}, 6, \bar{3})$, $(\bar{2}, 4, 3)$ u. s. w. in der Tafel hätten ersetzt werden können. — Dafs, aufser den theils in der Tafel befindlichen, theils durch die angegebene Zeichen-Änderung aus ihnen hervorgehenden 140 Substitutionen mit der Determinante $+1$, fernere 140 Substitutionen mit der Determinante -1 als sich von selbst verstehend auch hier gänzlich ausgeschlossen werden, wird gewifs Billigung finden.

Aus der vorhergehenden Tafel erhält man durch umgekehrte Anordnung, nämlich durch Zusammenfassen derjenigen Substitutionen, welchen derselbe Complex von Bedingungen entspricht, die folgende:

II b. Tafel zur Aufstellung aller Transformationen, durch welche eine reducirte Form mit *nicht positiven* unteren Coëfficienten in sich selbst übergeht.

Bedingungen.	Substitutionen.
Keine Bedingung.	$(1, 2, 3)$.
$a = 2b', b'' = 0$:	$(1, \bar{2}, \bar{5})$.
$a = 2b'', b' = 0$:	$(1, \bar{4}, \bar{3})$.
$a' = 2b, b'' = 0$:	$(\bar{1}, 2, \bar{6})$.
$a = 2b' + b'', a' = 2b + b''$:	$(\bar{1}, \bar{2}, 7)$.
$a = a', b = b'$:	$(\bar{2}, \bar{1}, \bar{3})$.
$a' = a'', b' = b''$:	$(\bar{1}, \bar{3}, \bar{2})$.
$a = a', \sigma$ (d. h. $a + a' = 2(b + b' + b'')$):	$(2, 1, \bar{7})$.
$a = a' = 2b = 2b', b'' = 0$:	$(2, \bar{1}, 5), (\bar{2}, 1, 6)$.
$a = a' = 2b'', b = b' = 0$:	$(2, \bar{4}, 3), (4, \bar{1}, 3), (\bar{4}, 2, \bar{3})$.
$a' = a'' = 2b, b' = b'' = 0$:	$(1, 3, \bar{6}), (1, 6, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{6}, 3)$.
$a' = a'', b' = b'', \sigma, a = 3b'$:	$(1, 3, \bar{7}), (1, \bar{7}, 2), (\bar{1}, 7, \bar{3})$.
$a = a' = a'', b = b' = b''$:	$(2, 3, 1), (3, 1, 2), (\bar{3}, \bar{2}, \bar{1})$.
$a = a' = a'', \sigma$:	$(3, \bar{7}, 1), (\bar{7}, 3, 2)$.
$a = a' = a'', \sigma, b = b'$:	$(\bar{3}, 7, \bar{2}), (7, \bar{3}, \bar{1})$.
$a = a' = a'', \sigma, b' = b''$:	$(\bar{2}, 7, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{1}, 7), (7, \bar{2}, \bar{3})$.
$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''$:	$(\bar{2}, \bar{3}, 7), (2, \bar{7}, 3), (3, 2, \bar{7}),$ $(7, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{7}, 1, 3), (\bar{7}, 2, 1)$.

Für den Fall, daß zwei der unteren Coëfficienten der Form verschwinden, verdoppelt sich die Zahl der aus dieser Tafel hervorgehenden Transformationen; jeder aus der Tafel erhaltenen Substitution muß dann eine zweite entsprechende hinzugefügt werden, welche aus ihr dadurch abgeleitet wird, daß man, wenn $b = b' = 0$ ist, die sechs Coëfficienten der ersten und zweiten Verticalreihe, wenn $b = b'' = 0$ ist, die sechs Coëfficienten der 1ten und 3ten Verticalreihe, wenn $b' = b'' = 0$ ist, die sechs Coëfficienten der 2ten und 3ten Verticalreihe des Substitutionssystems mit entgegengesetzten Vorzeichen annimmt, wobei es ganz gleichgültig ist, ob jene Bedingungen ($b = b' = 0$ u. s. w.) schon unter denen der Tafel begriffen sind, oder nicht. Für den Fall, daß alle drei unteren Coëfficienten verschwinden, also $b = b' = b'' = 0$ ist, liefert die Tafel nur den vierten Theil der Substitutionen, und die übrigen werden erhalten, indem man nach und nach und immer gleichzeitig sowohl in der 1ten und 2ten, als in der 1ten und 3ten, als auch endlich in der 2ten und 3ten Verticalreihe der Substitutions-Systeme die angegebene Zeichenänderung vornimmt. — Zwei Beispiele werden nicht überflüssig sein, um den Gebrauch der Tafeln zu erläutern. Um alle Substitutionen der Form $\begin{pmatrix} 3, & 3, & 4 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}$ in sich selbst zu finden, muß man die für sie stattfindenden Relationen (Bedingungen) zwischen den Coëfficienten: $a = a', b = b', b' = b'', a + a' = 2(b + b' + b'')(\sigma)$, zum Gebrauch der Tafel in folgende Gruppen zerlegen:

ohne Rücksicht auf die Bedingungen erhält man die Substitution $(1, 2, 3)$,
 die Gruppe $a = 2b' + b'', a' = 2b + b''$ liefert — — — $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{7})$,
 die Gruppe $a = a', b = b'$ liefert — — — $(\bar{2}, \bar{1}, \bar{3})$,
 die Gruppe $a = a', \sigma$ liefert — — — $(2, 1, \bar{7})$,
 also geht die vorgelegte Form durch jede der vier Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, & 1, & -1 \\ 1, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $+1$ und nur durch diese in sich selbst über, insofern es überflüssig erscheint, die vier Substitutionen mit der Determinante -1 , welche aus jenen durch Zeichenänderung sämtlicher *neun* Substitutions-Coëfficienten hervorgehen, noch besonders vorzuführen. Für die Form $\begin{pmatrix} 1, & 4, & 5 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ ergiebt sich, außer der evidenten Substitution $(1, 2, 3)$, aus der Gruppe von

Bedingungen $a' = 2b$, $b'' = 0$ noch die Substitution $(\bar{1}, 2, \bar{6})$; da aber $b' = b'' = 0$ ist, so müssen diesen beiden aus der Tafel erhaltenen die beiden folgenden $(1, \bar{2}, \bar{3})$, $(\bar{1}, \bar{2}, 6)$ hinzugefügt werden, so daß die Form $\begin{pmatrix} 1, 4, 5 \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$ und jede Form wie $\begin{pmatrix} 1, 4, a'' \\ -2, 0, 0 \end{pmatrix}$, in der $a'' > 4$ ist, durch jede der vier Substitutionen mit der Determinante $+1$:

$$\begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1, 0, 0 \\ 0, 1, -1 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, -1, 0 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1, 0, 0 \\ 0, -1, 1 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$$

und *nur* durch diese in sich selbst transformirt werden kann.

C. Versuch einer Tabelle der nicht äquivalenten unbestimmten (indifferenten) ternären quadratischen Formen für die Determinanten ohne quadratischen Theiler unter 20.

Determinante.	Indifferente ternäre quadratische Formen.
1	$\begin{pmatrix} 0, 0, 1 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$.
2	$\begin{pmatrix} 0, 1, 2 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, 0, 2 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}^*)$.
3	$\begin{pmatrix} 0, 0, 3 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, 1, -3 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$.
5	$\begin{pmatrix} 0, 0, 5 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, 2, -2 \\ 1, 0, 0 \end{pmatrix}$.
6	$\begin{pmatrix} 0, 1, 6 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, 1, -6 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, 0, 6 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$.
7	$\begin{pmatrix} 0, 0, 7 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, 1, -7 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$.
10	$\begin{pmatrix} 0, 1, 10 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, 2, -5 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, 0, 10 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$.

*) Die in zweiter Zeile stehenden Formen für die *geraden* Determinanten sind die *uneigentlich* primitiven.

Determinante.	Indifferente ternäre quadratische Formen.
11	$(0, 0, 11), (1, 1, -11).$
13	$(0, 0, 13), (1, 2, -6).$
14	$(0, 1, 14), (1, 1, -14),$ $(0, 0, 14).$
15	$(0, 0, 15), (1, 1, -15), (1, -3, 5), (1, 3, -5).$
17	$(0, 0, 17), (-1, 3, 6).$
19	$(0, 0, 19), (1, 1, -19).$

Bei der Construction dieser kleinen Tabelle, welche noch während des Druckes vorliegender Abhandlung hinzugefügt worden ist, bestand die eigentliche Arbeit in dem strengen Nachweise, daß die hier aufgestellten Formen wirklich erschöpfend sind, d. h. daß jede andere unbestimmte Form mit derselben Determinante in eine von ihnen transformirt werden kann; denn daß sie selbst alle untereinander nicht-äquivalent sind, geht unmittelbar daraus hervor, daß sie sämmtlich in verschiedene *Genera* (vergl. im 35ten Bande des *Crelleschen Journals* S. 125 ff.) gehören. Indem ich mir die Auseinandersetzung der hierbei angewandten eigenthümlichen Vortheile vorbehalte, bemerke ich nur, daß obige Formen als Repräsentanten der sie enthaltenden Classen immer so ausgewählt sind, daß ihr erster Coëfficient mit der absolut kleinsten durch die Form darstellbare Zahl zusammenfällt. Was namentlich diejenigen Formen betrifft, durch welche *Null* darstellbar ist und deren Repräsentanten oben in der Tabelle die erste Stelle einnehmen, so zeigt man durch eine einfache Reduction (vergl. *Gauss* Disq. arithm. S. 317 der französischen Übersetzung), daß jede solche Form in eine äquivalente von folgender Art

$$\begin{pmatrix} 0, & a', & a'' \\ b, & 0, & b'' \end{pmatrix}$$

transformirt werden kann, in welcher der erste und fünfte Coëfficient = 0 sind *),

*) Es kann dies als ein specieller Fall eines von *Jacobi* neuerdings aufgestellten Satzes angesehen werden, daß man nämlich jede quadratische Form mit beliebig vielen Variablen in eine äquivalente transformiren kann, in welcher alle Glieder fehlen, bis auf die Quadrate und die Producte je zweier unmittelbar auf einander folgenden Variablen.

so daß die Determinante Δ einfach $= a'' b''^2$ wird, während überdies a' und b noch besonderen Grenzbedingungen in Bezug auf a'' und b'' unterworfen werden können. Enthält die Determinante Δ keine quadratischen Theiler, so muß $b'' = 1$, $a'' = \Delta$ sein, und alle jene Formen reduciren sich dann für ein ungerades Δ auf die einzige $\begin{pmatrix} 0, 0, \Delta \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$, und für ein gerades Δ auf die beiden $\begin{pmatrix} 0, 1, \Delta \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, 0, \Delta \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$. Bezeichnet man nun durch F die zugeordnete dieser Formen, so stellt F die Zahl $+1$ dar, es ist daher F quadratischer Rest zu allen in Δ aufgehenden Primfactoren. Andererseits folgt leicht aus dem von *Legendre* aufgestellten Satze über die Lösbarkeit der unbestimmten Gleichung

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0,$$

und aus der Entwicklung, welche *Gauß*s diesem Satze gegeben hat, daß umgekehrt *Null* durch jede ternäre Form f darstellbar ist, deren Determinante keinen quadratischen Theiler enthält, und für welche $FR\Delta$, also F zu sämtlichen Primfactoren von Δ quadratischer Rest ist. Diese Bemerkung in Verbindung mit dem vorhergehenden Resultate, daß für einen ungeraden Werth von Δ ohne quadratischen Theiler alle Formen, durch welche *Null* darstellbar ist, auf die einzige $\begin{pmatrix} 0, 0, \Delta \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$ reducirt werden können, führte zu dem merkwürdigen Satze,

*„daß für jede ungerade Determinante Δ ohne quadratischen Theiler dasjenige Genus unbestimmter ternärer quadratischer Formen, welchem die sämtlichen in $FR\Delta$ enthaltenen zugeordneten Charactere entsprechen, immer überhaupt nur eine einzige Classe von Formen enthält, welche durch die Form $\begin{pmatrix} 0, 0, \Delta \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$ oder auch durch die ihr äquivalente Form $\begin{pmatrix} 1, -1, \Delta \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix} = x^2 - y^2 + \Delta z^2$ repräsentirt wird *).*

*) Für ein gerades Δ ohne quadratischen Theiler existiren zwei solcher Genera, ein eigentlich primitives und ein uneigentlich primitives, welche ebenfalls jedes immer nur eine einzige Classe enthalten, ersteres die Classe der Form $\begin{pmatrix} 0, 1, \Delta \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$, letzteres die Classe der Form $\begin{pmatrix} 0, 0, \Delta \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$.

Aus diesem (streng bewiesenen) Satze ergab sich die am Schlusse der ersten Abtheilung ausgesprochene Vermuthung, welche wenigstens durch die obigen allerdings nicht sehr zahlreichen Beispiele keine Widerlegung findet, dafs auch die übrigen *Genera* für eine solche Determinante nur *eine* Classe von Formen enthalten, also die Zahl der Classen mit der Zahl der *Genera* $= 2^n$ übereinstimmen möchte. Ist z. B. die Determinante eine ungerade Primzahl $\Delta = p$, so existiren überhaupt nur 2 *Genera* mit den zugeordneten Characteren FRp und FNp , und für das erstere FRp ist durch das Vorhergehende bereits bewiesen, dafs es nur *eine* Classe enthält; dasselbe wäre also nur noch für das zweite *Genus* nachzuweisen; ist $p \equiv 3 \pmod{4}$, so enthält dieses zweite *Genus* jedenfalls die Form $f = \begin{pmatrix} 1, 1, -p \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ mit der zugeordneten $F = \begin{pmatrix} p, p, -1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$, so dafs für eine solche Primzahl nur die Frage bleibt, ob wirklich jede Form, für welche FNp oder $-FRp$, jener $x^2 + y^2 - pz^2$ äquivalent ist. Die genauere Ergründung des hier angeregten schwierigen Problems mufs jedoch fernerer Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Eisenstein, G.

Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen: nebst den
Resultaten neuer Forschungen über diese Formen

Berlin 1851

4 Math.p. 103 nc

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053425-6